



# Automates cellulaires probabilistes et processus itérés ad libitum

Jerôme Casse

## ► To cite this version:

Jerôme Casse. Automates cellulaires probabilistes et processus itérés ad libitum. Probabilités [math.PR]. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0248 . tel-01257758

**HAL Id: tel-01257758**

**<https://theses.hal.science/tel-01257758>**

Submitted on 18 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE  
Spécialité : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

Par M. CASSE, Jérôme

**Automates cellulaires probabilistes et  
processus itérés *ad libitum***

soutenue le 19 novembre 2015 au Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

devant le jury composé de :

M. BERCU, Bernard	Professeur, IMB, Université de Bordeaux	Examineur
M. CHASSAING, Philippe	Professeur, IECL, Université de Lorraine	Rapporteur
M. LOUIS, Pierre-Yves	Maître de Conférence, LMA, Université de Poitiers	Rapporteur
M. MAIRESSE, Jean	Directeur de Recherche CNRS, LIP6, Université Pierre et Marie Curie	Président
M. MARCKERT, Jean-François	Directeur de Recherche CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux	Directeur de thèse
Mme MARCOVICI, Irène	Maître de conférence, IECL, Université de Lorraine	Examinatrice



---

## Automates cellulaires probabilistes et processus itérés *ad libitum*

---

**Résumé :** La première partie de cette thèse porte sur les automates cellulaires probabilistes (ACP) sur la ligne et à deux voisins. Pour un ACP donné, nous cherchons l'ensemble de ces lois invariantes. Pour des raisons expliquées en détail dans la thèse, ceci est à l'heure actuelle inenvisageable de toutes les obtenir et nous nous concentrons, dans cette thèse, sur les lois invariantes markoviennes. Nous établissons, tout d'abord, un théorème de nature algébrique qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ACP admette une ou plusieurs lois invariantes markoviennes dans le cas où l'alphabet  $E$  est fini. Par la suite, nous généralisons ce résultat au cas d'un alphabet  $E$  polonais après avoir clarifié les difficultés topologiques rencontrées. Enfin, nous calculons la fonction de corrélation du modèle à 8 sommets pour certaines valeurs des paramètres du modèle en utilisant une partie des résultats précédents.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'itération à l'infini de processus aléatoires. Nous établissons la convergence ou non des lois finies-dimensionnelles des processus  $\alpha$ -stables itérés  $n$  fois, quand  $n$  tend vers l'infini, en fonction du paramètre de stabilité  $\alpha$  et du drift  $r$ . Puis, nous décrivons les lois limites ainsi obtenues. Dans le cas du mouvement brownien itéré à l'infini, nous relierons les lois limites obtenues avec des lois invariantes de systèmes de fonctions itérées.

**Mots clés :** chaîne de Markov, loi invariante, automate cellulaire probabiliste, mouvement brownien itéré, processus  $\alpha$ -stable, modèle à 8 sommets

---

### Unité de Recherche

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)

Université de Bordeaux

351, cours de la Libération

33405 Talence Cedex, France

---



---

## Probabilistic cellular automata and processes iterated *ad libitum*

---

**Abstract :** The first part of this thesis is about probabilistic cellular automata (PCA) on the line and with two neighbors. For a given PCA, we look for the set of its invariant distributions. Due to reasons explained in detail in this thesis, it is nowadays unthinkable to get all of them and we concentrate our reflections on the invariant Markovian distributions. We establish, first, an algebraic theorem that gives a necessary and sufficient condition for a PCA to have one or more invariant Markovian distributions when the alphabet  $E$  is finite. Then, we generalize this result to the case of a polish alphabet  $E$  once we have clarified the encountered topological difficulties. Finally, we calculate the 8-vertex model's correlation function for some parameters' values using previous results.

The second part of this thesis is about infinite iterations of stochastic processes. We establish the convergence of the finite dimensional distributions of the  $\alpha$ -stable processes iterated  $n$  times, when  $n$  goes to infinite, according to parameter of stability  $\alpha$  and to drift  $r$ . Then, we describe the limit distributions. In the iterated Brownian motion case, we show that the limit distributions are linked with iterated functions system.

**Keywords :** Markov chain, invariant distribution, probabilistic cellular automaton, iterated Brownian motion,  $\alpha$ -stable process, 8-vertex model

---

### Research Unit

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)  
Université de Bordeaux  
351, cours de la Libération  
33405 Talence Cedex, France

---



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Jean-François Marckert pour avoir accepté d'encadrer ma thèse et pour l'avoir faire merveilleusement. Merci pour ta confiance, ta patience et tes très nombreux et judicieux conseils qui ont permis et permettent encore de m'améliorer moi et mes recherches.

Un grand merci à Pierre-Yves Louis et Philippe Chassaing pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie doublement Jean Mairesse. Une première fois pour avoir accepté de présider mon jury et, une seconde, pour m'avoir intéressé, il y a quelques années par son cours à l'ENS, aux probabilités invariantes et à l'ergodicité des chaînes de Markov.

Merci à Bernard Bercu et à Irène Marcovici pour avoir accepté de faire partie de mon jury et de l'intérêt que vous avez porté à mes travaux. Je remercie également Irène pour son amitié qui m'a permis de m'intégrer rapidement dans l'équipe de probabilité et statistiques de l'IECL.

Je tiens à remercier chaleureusement toute la communauté ALÉA pour, entre autres, l'organisation des journées ALÉA au CIRM. C'est à chaque fois un immense plaisir d'y assister tant sur le plan humain que scientifique. Plus localement, je tiens à remercier les membres du thème de combinatoire énumérative et algébrique du LaBRI. Ce fut un très grand honneur pour moi de vous côtoyer et d'avoir pu apprendre et approfondir mes connaissances en combinatoire à vos côtés. Pour Romaric et Julien : je n'oublierais jamais nos trajets animés entre Marseille et Bordeaux.

Un immense merci à tous les membres du LaBRI (permanents, non-permanents et administratifs) pour l'ambiance chaleureuse qui y règne. Dans ce contexte, je remercie en particulier l'ensemble des membres de l'Afodib pour les sorties, les soirées jeux et les pauses café, ainsi que leur soutien aux sémidocs. Merci à Julien, Romaric et Claire d'avoir co-organisé ces derniers avec moi, ce fut à chaque fois un plaisir.

Mes amitiés au bureau 123 et à tous ceux qui y sont passés et, plus particulièrement, à Gabriel, Christian, Lucas, Omar et Nesrine. L'ambiance y a été toujours sympathique et studieuse.



Merci aussi à tous mes amis et notamment aux recPC (Fofo, Yoann, Benjamin et Robin) pour ses soirées de détente et de franches rigolades. Bien évidemment, un immense merci à Anthony pour m'avoir logé à Paris à de nombreuses reprises et surtout pour son amitié indéfectible depuis tant d'années.

Mes derniers remerciements sont pour ma famille. Merci à mes oncles, tantes, cousins et cousine pour ces week-ends et vacances passés en leur agréable compagnie, sans oublier la petite dernière Constance et les petits derniers Bruce et Alix. Merci à mes deux grand-mères pour leur soutien et une pensée pour les deux grands-pères partis un peu trop vite. Et, enfin, un très grand merci à mes parents pour m'avoir accompagné autant qu'ils le pouvaient dans ma réussite et pour leur soutien total depuis le début : infiniment merci. Et, pour finir, je remercie ma petite soeur adorée et lui souhaite bon courage pour la suite de ses études.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Automates cellulaires probabilistes</b>	<b>35</b>
<b>1 ACP avec un alphabet fini</b>	<b>37</b>
1.1 Introduction . . . . .	38
1.1.1 The structures . . . . .	40
1.1.2 A notion of Markovianity per structure . . . . .	41
1.1.3 References and contributions of the present paper . . . . .	42
1.2 Algebraic criteria for Markovianity . . . . .	46
1.2.1 Markov chains: classical facts and notation . . . . .	46
1.2.2 Markovianity of an invariant distribution on HZ: complete solution . . . . .	47
1.2.3 Markovianity of an invariant distribution on HZ( $n$ ): complete solution . . . . .	52
1.2.4 Markov invariant distribution on the line . . . . .	53
1.3 Markov invariant distribution on H vs H( $n$ ) vs HZ vs HZ( $n$ ) . . . . .	58
1.4 Proofs of Theorems 1.2.2, 1.2.6 and 1.2.4 . . . . .	61
1.4.1 Proof of Theorem 1.2.4 . . . . .	66
<b>2 ACP avec un alphabet infini</b>	<b>69</b>
2.1 Introduction . . . . .	70
2.2 Examples . . . . .	82
2.2.1 PCA with finite alphabet . . . . .	82
2.2.2 Two new models of PCA with infinite alphabet . . . . .	83
2.2.3 PCA with infinite alphabet in the literature . . . . .	85
2.3 Proofs of the main results . . . . .	87
2.3.1 Proof of Theorem 2.1.1 . . . . .	87
2.3.2 Proof of Theorem 2.1.2 . . . . .	89

2.3.3	Proof of Proposition 2.1.10 . . . . .	92
2.4	Extension to $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	93
2.4.1	PCA on $\mathbb{Z}$ . . . . .	93
2.4.2	PCA on $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	95
<b>3</b>	<b>ACP et “vertex-models”</b>	<b>99</b>
3.1	Introduction . . . . .	100
3.2	Résultats sur les ACP triangulaires . . . . .	117
3.2.1	Lemmes généraux sur les ACP triangulaires et les HZMC in- variantes . . . . .	117
3.2.2	Preuve du Théorème 3.1.5 . . . . .	119
3.2.3	Preuve du Théorème 3.1.6 . . . . .	120
3.2.4	Preuve de la Proposition 3.1.8 . . . . .	121
3.3	Preuve du Théorème 3.1.3 . . . . .	121
3.3.1	Cas particulier : $(i \geq 0 \text{ et } t \leq i - 1)$ ou $(i \leq -1 \text{ et } t \leq -i)$ . .	122
3.3.2	Cas général . . . . .	122
3.4	Cas particulier : $b = c$ et $a = d$ . . . . .	127
<b>II</b>	<b>Processus itérés (<i>ad libitum</i>)</b>	<b>129</b>
<b>4</b>	<b>Processus itérés</b>	<b>131</b>
4.1	Introduction . . . . .	132
4.2	Random processes . . . . .	133
4.3	Iteration of processes: general considerations . . . . .	134
4.3.1	The gaps sequence evolution . . . . .	135
4.3.2	The iterated process evolution . . . . .	137
4.3.3	Asymptotic independence of labelling permutation and gaps sequence . . . . .	138
4.4	Iteration of Brownian processes . . . . .	140
4.4.1	Iteration of BM ad libitum . . . . .	142
4.4.2	Iteration of reflected BM ad libitum . . . . .	147
4.4.3	$n$ th iteration of the BM . . . . .	149
4.5	Stable processes iterated ad libitum . . . . .	151
4.5.1	Main results . . . . .	151
4.5.2	Occupation measure in the stable case . . . . .	153
4.5.3	Proofs of Theorem 4.5.1 . . . . .	156
4.6	Conclusion . . . . .	160

# Introduction

Cette thèse est formée de deux parties indépendantes. La première partie porte sur les automates cellulaires probabilistes. La seconde sur les processus aléatoires itérés à l'infini. Le dénominateur commun de ces deux sujets sont les chaînes de Markov.

Les chaînes de Markov ont été introduites en 1906 par Andreï Andreïevitch Markov afin de généraliser la loi des grands nombres à des variables dépendantes [Mar10]. Depuis, elles sont devenues un outil classique pour modéliser et étudier de nombreux phénomènes dans divers domaines, citons pêle-mêle la théorie des files d'attente, l'évolution de populations, la météorologie, les marches aléatoires sur des graphes, la physique statistique, et bien d'autres. Nous utiliserons comme référence sur les chaînes de Markov le livre de Meyn et Tweedie [MT09].

## Partie I : Automates cellulaires probabilistes

### Définition et exemples

Commençons avec un exemple simple d'automate cellulaire probabiliste.

**Exemple 1.** Prenons initialement (au temps  $t = 0$ ) un coloriage  $S_0 = (S_0(i) : i \in \mathbb{N})$  par des 0 et des 1 de la demi-droite discrète  $\mathbb{N}$ . À partir de ce coloriage, on construit un nouveau coloriage  $S_1$  (au temps  $t = 1$ ) de  $\mathbb{N}$  de la manière suivante : pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , pour tout  $a, b, c \in \{0, 1\}$ ,

$$P(S_1(i) = c | S_0(i) = a, S_0(i+1) = b) = T((a, b); c)$$

avec

$$T((0, 0); 0) = 1 ; T((0, 0); 1) = 0 ; T((0, 1); 0) = 1/5 ; T((0, 1); 1) = 4/5 ; \quad (1)$$

$$T((1, 0); 0) = 4/7 ; T((1, 0); 1) = 3/7 ; T((1, 1); 0) = 1/3 ; T((1, 1); 1) = 2/3. \quad (2)$$

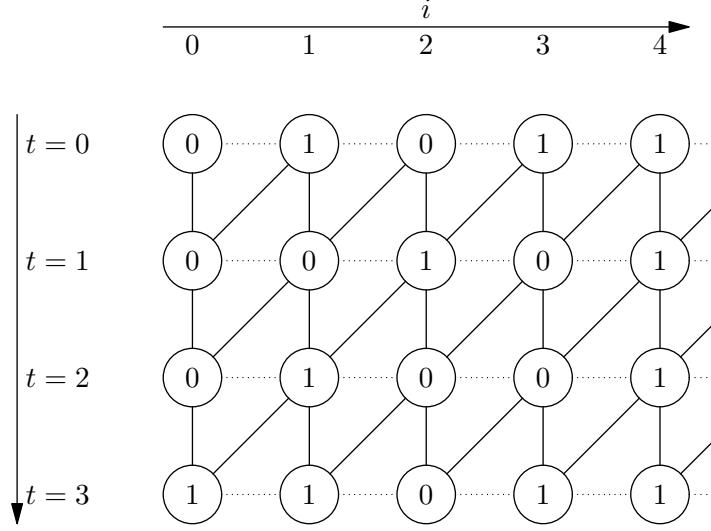


FIGURE 1 – Les 3 premières itérations de l'ACP de l'Exemple 1.

Les transitions se font de manière indépendantes : conditionnellement à  $(S_0(i) : i \in \mathbb{N})$ , les  $(S_1(i) : i \in \mathbb{N})$  sont indépendants. Par la suite, on construit  $S_{t+1}$  à partir de  $S_t$  de la même façon et on engendre ainsi une suite de coloriage  $(S_t : t \geq 0)$ . Un exemple du résultat obtenu est visible sur la Figure 1.

Maintenant, définissons de manière formelle ce qu'est un ACP dans un cas général.

Un *automate cellulaire probabiliste*  $\mathbf{A}$  est la donnée d'un quadruplet  $(E, \mathbb{L}, N, T)$  où :

- $E$  est un espace fini ;
- $\mathbb{L}$  est un réseau ;
- $N$  est une fonction de voisinage, i.e. il existe un sous-ensemble fini  $I$  de  $\mathbb{L}$  tel que, pour tout  $i \in \mathbb{L}$ ,  $N(i) = (i + j : j \in I)$ , on note  $|N|$  le cardinal de  $I$  ;
- $T$  est une matrice de transition de  $E^{|N|}$  dans  $E$ , i.e. pour tout  $x \in E^{|N|}$ , pour tout  $y \in E$ ,  $T(x; y) \geq 0$  et  $\sum_{y' \in E} T(x; y') = 1$ .

À partir de ce quadruplet  $(E, \mathbb{L}, N, T)$ , on peut définir une chaîne de Markov  $(S_t : t \geq t_0)$  à temps discret à valeurs dans  $E^{\mathbb{L}}$ , c'est-à-dire, pour tout  $t$ ,  $S_t = (S_t(i) : i \in \mathbb{L})$  est une coloration de  $\mathbb{L}$ . Tout d'abord, on munit  $E^{\mathbb{L}}$  de la tribu produit usuelle. Au temps  $t_0$ , on part d'un état  $S_{t_0}$  arbitraire. Ensuite, si au temps  $t \geq t_0$ , notre chaîne de Markov  $S_t$  est dans l'état  $(a_i : i \in \mathbb{L})$  alors, au temps  $t+1$ , pour tout sous-ensemble fini  $C \subset \mathbb{L}$ , pour tout  $(b_i : i \in C) \in E^C$ ,

$$P((S_{t+1}(i) = b_i : i \in C) | S_t = (a_i : i \in \mathbb{L})) = \prod_{j \in N(C)} T((a_j : j \in N(i)); b_i)$$

où  $N(C) = \bigcup_{i \in C} N(i)$ . La loi du processus  $S_{t+1}$  est bien définie car définie de manière compatible sur tous les cylindres de  $E^{\mathbb{L}}$ . L'ensemble  $(S_t : t \geq t_0)$  est appelé *diagramme espace-temps*.

Une autre façon de voir les ACP et de les voir comme agissant de manière déterministe sur les mesures de probabilités  $\mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  de  $E^{\mathbb{L}}$ . Soit un ACP  $\mathbf{A} = (E, \mathbb{L}, N, T)$ . Soit  $\mu \in \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  et  $S_{t_0} \in E^{\mathbb{L}}$  distribué suivant  $\mu$ . Notons  $\nu$  la loi de  $S_{t_0+1}$ , l'image de  $S_{t_0}$  par le PCA  $\mathbf{A}$ . Pour tout sous-ensemble fini  $C \subset \mathbb{L}$  et pour tout  $(b_i : i \in C) \in E^C$ ,

$$\nu((b_i : i \in C)) = \sum_{(a_j : j \in N(C)) \in E^{N(C)}} \mu((a_j : j \in N(C))) \prod_{i \in C} T((a_j : j \in N(i)) ; b_i). \quad (3)$$

L'équation 3 définit  $\nu$  de manière unique car elle la définit sur tous les cylindres finis de  $E^{\mathbb{L}}$ . On note  $\text{Tr}_{\mathbf{A}}$  la fonction de  $\mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  dans  $\mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  qui envoie toute mesure de probabilité  $\mu \in \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  sur l'unique mesure de probabilité  $\nu$  définie par 3. On dit que  $\mu$  est une *probabilité invariante* pour  $\mathbf{A}$  si  $\mu = \text{Tr}_{\mathbf{A}}(\mu)$ . Par la suite, quand le contexte est clair, on note  $\text{Tr}$  plutôt que  $\text{Tr}_{\mathbf{A}}$ .

Avec ces notations, l'ACP  $\mathbf{A}_1$  de l'Exemple 1 est l'ACP avec

$$(E = \{0, 1\}, \mathbb{L} = \mathbb{N}, N(i) = (i, i + 1), T)$$

avec  $T$  définie par les équations (1) et (2). La Figure 1 est une réalisation de son diagramme espace-temps de  $t = 0$  à  $t = 3$ . L'ACP  $\mathbf{A}_1$  possède au moins une probabilité invariante : la mesure de Dirac en  $(0, 0, \dots)$ ,  $\delta_{0^{\mathbb{N}}}$ . Il en existe possiblement d'autres moins triviales pour  $\mathbf{A}_1$ .

De part la simplicité des règles de mise à jour (qui sont locales, synchrones et identiques pour toutes les cellules du réseau) et par les comportements complexes qu'ils engendrent (transition de phase, ergodicité ou non, etc.), les ACP sont de bons candidats pour simuler de nombreux systèmes complexes intervenant en biologie, en chimie, en physique ou en informatique. Ils ont également fait leur preuve en mathématiques où ils permettent de résoudre des questions dans d'autres domaines notamment en probabilité et en physique statistique. Une de ces questions a été le dénombrement des animaux dirigés comme nous allons le voir maintenant.

## Les ACP et l'énumération des animaux dirigés

Un animal dirigé est un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{N}^2$  de sorte que tout point  $(i, j) \in A$  soit relié à l'origine  $(0, 0)$  par un chemin composé de pas Est et Nord dans  $A$  (un chemin dans  $A$  est un chemin dont tous les points sont dans  $A$ ).<sup>a</sup> Un exemple

---

a. Dans le cas d'un animal dirigé non vide,  $(0, 0)$  fait donc partie de l'animal dirigé.

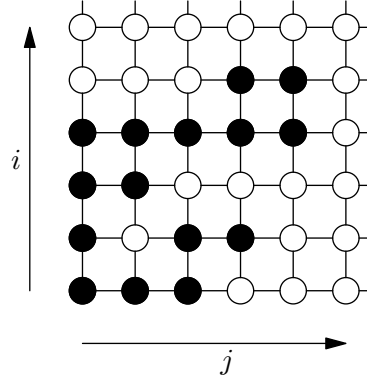


FIGURE 2 – Un animal dirigé

d'animal dirigé est présenté en Figure 2.

Une des premières questions est alors d'énumérer le nombre  $a_k$  d'animaux dirigés  $A$  composés de  $|A| = k$  points. Pour  $k$  petit, l'énumération peut se faire facilement "à la main" : pour  $k = 0$ ,  $a_0 = 1$  (l'animal vide) ; pour  $k = 1$ ,  $a_1 = 1$  ( $A = \{(0, 0)\}$ ) ; pour  $k = 2$ ,  $a_2 = 2$  ( $\{(0, 0); (0, 1)\}$  et  $\{(0, 0); (1, 0)\}$ ) ; pour  $k = 3$ ,  $a_3 = 5$ ... Mais, l'énumération manuelle devient vite fastidieuse à mesure que  $k$  croît. Une solution classique de la combinatoire énumérative est alors d'étudier la série génératrice  $S_{AD}(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ .

En 1982, Dhar [Dha82] a montré que cette série génératrice était calculable en utilisant des méthodes issues de la physique statistique et notamment les gaz à particules dures. Nous présentons ici une preuve de l'énumération dans l'esprit de celle de Dhar, mais en se servant d'ACP. Soit l'ACP  $\mathbf{A}_d = (\{0, 1\}, \mathbb{Z}, N(i) = (i, i + 1), T)$ , qui modélise un gaz à particules dures, où  $T$  vérifie :

$$T((0, 0); 1) = p ; T((0, 1); 1) = 0 ; T((1, 0); 1) = 0 ; T((1, 1); 1) = 0.$$

On peut montrer que cet ACP admet une probabilité invariante  $\mu$  avec  $\mu(1) = -S_{AD}(-p)$ . De plus, le calcul de cette probabilité invariante  $\mu$  permet de prouver que  $S_{AD}(z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+z}{1-3z}} - 1 \right)$ . L'étude des animaux dirigés à l'aide d'ACP<sup>a</sup> a également permis le dénombrement des animaux dirigés par d'autres statistiques que la taille [BM98]. Plus récemment, Holroyd, Marcovici et Martin ont montré l'ergodicité de l'ACP  $\mathbf{A}_d$  qui modélise un gaz à particules dures [HMM15].

a. Principalement sous le nom de modèles de gaz combinatoires

Comme nous venons de le voir, la connaissance des lois invariantes des ACP permet d'énumérer les animaux dirigés. Ceci est un exemple parmi d'autres de la nécessité d'étudier la dynamique (ergodicité et lois invariantes) des ACP. La section suivante présente cet aspect des ACP.

## Ergodicité, lois invariantes et description du Chapitre 1 : automates cellulaires probabilistes à lois invariantes markoviennes

Un automate cellulaire probabiliste est ergodique si, pour toute loi initiale  $S_0 \sim \mu_0$ , la suite des  $(\mu_t : t \in \mathbb{N})$  converge quand  $t \rightarrow \infty$  vers une limite  $\mu_\infty$  et qu'en plus cette limite  $\mu_\infty$  ne dépend pas de  $\mu_0$ . Cela implique entre autre l'existence et l'unicité d'une loi invariante pour cet ACP, mais ce n'est pas équivalent [CM11].

L'existence d'au moins une loi invariante pour un ACP sur un espace  $E$  fini est assurée par un argument de point fixe (voir [TVS<sup>+</sup>90, Proposition 2.5]). Par contre savoir si un ACP quelconque est ergodique est un problème hors d'atteinte pour l'instant. D'ailleurs, un des problèmes ouverts les plus fameux sur les ACP est le suivant : est-ce que tous les ACP ( $E = \{0, 1\}, \mathbb{Z}, N(i) = (i, i + 1), T$ ) où  $T$  vérifie  $T((a, b); c) > 0$  pour tout  $a, b, c \in E$  sont ergodiques ? La communauté des ACP pense que la réponse à cette question est "oui" (mais sans preuve complète pour l'instant). En revanche, il a été montré par Gács en 2001, dans un article parfois soumis à controverse [Gá01], que la réponse à cette question est "non" si on prend  $E$  d'une taille suffisamment grande.

Un autre point crucial, une fois l'existence d'au moins une loi invariante établie, est de déterminer et caractériser cette ou ces lois invariantes. Calculer de manière générique les lois finies dimensionnelles des lois invariantes d'un ACP en fonction de la matrice de transition  $T$  de l'ACP est totalement hors d'atteinte pour l'instant. À l'heure actuelle, on cherche sous quelles conditions les ACP possèdent des lois invariantes simples : des lois de types markoviennes ou des lois produits. Cette démarche peut paraître vaine, mais elle est pourtant fondamentale et classique dans de nombreux domaines, entre autres la combinatoire et la physique statistique. Elle permet de comprendre et d'identifier, dans l'espace des paramètres définissant les ACP, la structure algébrique nécessaire pour obtenir des lois invariantes simples. Cette démarche et notre manière de procéder sont de même nature que celles de la physique statistique qui cherchent à identifier les "modèles intégrables" [Bax82] ou des combinatoristes qui cherchent à décomposer leurs objets afin de les dénombrer [FS09].

Avant de donner les résultats déjà connus sur les mesures invariantes des ACP, précisons ce que l'on entend par loi markovienne et loi invariante markovienne. Soit  $(X_k : k \geq 0)$  une chaîne de Markov à valeurs dans un espace  $E$  fini de noyau de transition  $M$  et de loi initiale  $\rho$ . On dit que  $\rho$  est invariante si  $\rho = \rho M$ . Pour des



raisons qui apparaîtront plus tard quand on rentrera dans les détails, nous sommes intéressés uniquement par les chaînes de Markov dont la loi initiale  $\rho$  est invariante car nous verrons que seules les chaînes de Markov sous une de leurs lois invariantes peuvent être invariantes par un ACP. Sous cette condition,  $X$  peut être définie sur tout  $\mathbb{Z}$  et sa loi  $\mu$  satisfait : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(a_i : -k \leq i \leq k) \in E^{k+1}$ ,

$$\mu((a_i : -k \leq i \leq k)) = \rho(a_{-k}) \prod_{j=-k}^{k-1} M(a_j; a_{j+1}).$$

On dit alors que  $\mu$  est une *loi markovienne* sur  $\mathbb{Z}$ . On dit que  $\mu$  est une *loi invariante markovienne* pour un ACP  $\mathbf{A}$  si  $\mu$  est une loi markovienne et  $\mu = \text{Tr}_{\mathbf{A}}(\mu)$ . Il ne faut pas confondre cette propriété spatiale ( $(S_t(i) : i \in \mathbb{Z})$  est une CM sous une de ses lois invariantes) avec le fait que  $(S_t : t \geq 0)$  est une CM (propriété temporelle). La propriété temporelle est vraie pour tout ACP, alors que celle spatiale ne l'est que sous certaines conditions que l'on cherche justement à déterminer.

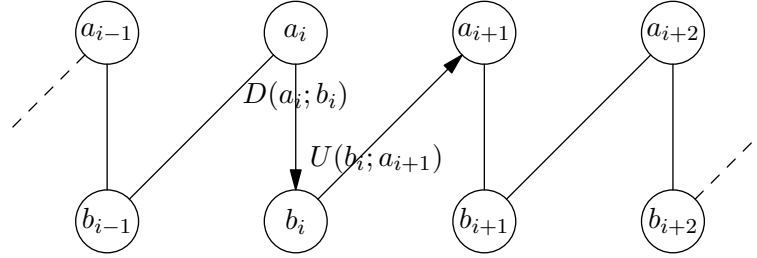
Pour les ACP sur des réseaux de type  $\mathbb{Z}^d$ , les premiers résultats obtenus l'ont été par Vasilyev [Vas78] en 1978. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ACP possède une mesure de type Gibbs comme loi invariante (la condition porte sur l'ACP et sur la mesure de Gibbs). Dai-Pra, Louis et Roelly [DP92, DPLR02, Lou02] ont, pour les ACP à taux positifs sur les réseaux  $\mathbb{Z}^d$ , montré de nombreuses propriétés qui établissent des liens entre les mesures de Gibbs sur  $\mathbb{Z}^d$ , les mesures de Gibbs invariantes par translation sur  $\mathbb{Z}^d$  et les mesures invariantes pour un ACP sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Par exemple, une de ces propriétés est le fait que si un ACP  $\mathbf{A}$  possède dans l'ensemble de ses lois invariantes une mesure de Gibbs invariante par translation, alors l'ensemble des lois invariantes de  $\mathbf{A}$  qui sont de plus invariantes par translation sont des mesures de Gibbs.

Pour les ACP sur les réseaux  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , les premiers résultats datent de 1969. Belyaev & al. ont donné une condition nécessaire et suffisante simple sur la matrice de transition  $T$  des ACP  $(\{0, 1\}, \mathbb{Z}, N(i) = (i, i+1), T)$  afin que ces ACP aient une loi invariante markovienne sur la ligne [BGM69]. En 1998, Bousquet-Mélou a montré un résultat similaire à celui de Belyaev mais pour le réseau  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  [BM98]. En 1990, Toom & al. ont donné une condition suffisante pour qu'un ACP avec un nombre fini quelconque de couleurs possède une loi invariante markovienne  $\mu$  [TVS<sup>+</sup>90, Lemme 16.2], la condition porte à la fois sur la matrice de transition  $T$  de l'ACP et sur le noyau  $M$  de la loi  $\mu$ . En 2014, Mairesse et Marcovici ont donné une condition suffisante pour qu'un ACP à plusieurs couleurs possède une loi produit invariante [MM14b].

Pour plus de détails sur les ACP, je renvoie au très bon article de survol de Mairesse et Marcovici [MM14a].

Contribution

---

FIGURE 3 – Une HZMC avec ses deux noyaux de transition  $D$  et  $U$ 

Les contributions présentées ci-après font l’objet d’une publication avec Jean-François Marckert dans “Stochastic Processes and their Applications” [CM15a].

Tout d’abord, signalons que, jusqu’ici, nous avons considéré que les ACP agissaient sur la ligne colorée  $S_t$  en la transformant en  $S_{t+1}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons les considérer comme agissant sur les couples de lignes colorées  $(S_t, S_{t+1})$  les transformant en  $(S_{t+1}, S_{t+2})$ . Il se trouve qu’il est plus facile, pour des raisons expliquées dans cette thèse, de trouver des lois invariantes aux ACP vus de cette manière.

Nous avons cherché à trouver une condition nécessaire et suffisante sur le noyau de transition  $T$  pour qu’un ACP  $(E, \mathbb{Z}, N(i) = (i, i+1), T)$ , avec  $E$  espace fini quelconque et  $T$  tel que  $T((a, b); c) > 0$  pour tout  $a, b, c \in E$ , admette une loi invariante markovienne  $\mu$  et, dans ce cas, caractériser le noyau  $M$  de la loi  $\mu$ . Nous avons obtenu un tel résultat pour les ACP qui admettent une loi invariante de type chaîne de Markov horizontal zigzag (HZMC<sup>a</sup>), un sous-ensemble des lois markoviennes. Une loi  $\mu \in \mathcal{M}(E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}})$  est dite de type HZMC s’il existe  $\rho_0 \in \mathcal{M}(E)$  et un couple  $(D, U)$  de matrices de transition de  $E$  dans  $E$  tel que

— pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(a_i : 0 \leq i \leq k) \in E^{k+1}$ ,  $(b_i : 0 \leq i \leq k-1) \in E^k$ ,

$$\mu((a_i : 0 \leq i \leq k), (b_i : 0 \leq i \leq k-1)) = \rho_0(a_0) \prod_{j=0}^{k-1} D(a_j; b_j) U(b_j; a_{j+1}).$$

Les HZMC sont des lois sur les couples de lignes colorées  $((a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots))$  parcourues en zigzag (voir Figure 3). Si  $\mu$  est de type HZMC avec noyaux  $(D, U)$ , alors, la mesure de probabilité  $\mu(\cdot, E^{\mathbb{N}})$  (resp.  $\mu(E^{\mathbb{N}}, \cdot)$ ) sur  $E^{\mathbb{N}}$  est la loi de la chaîne de Markov de loi initiale  $\rho_0$  (resp.  $D\rho_0$ ) et de noyau de transition  $DU$  (resp.  $UD$ ). Ces lois HZMC correspondent aux mesures de Gibbs sur 2 lignes [Vas78].

Le principal résultat du Chapitre 1 est le théorème suivant :

---

a. Pour Horizontal Zigzag Markov Chain.

**Théorème 2.** *Soit un ACP  $(E, \mathbb{Z}, N(i) = (i, i + 1), T)$  où  $E = \{0, \dots, \kappa\}$  est fini et  $T$  à taux positif (i.e.  $T((a, b); c) > 0$  pour tout  $a, b, c \in E$ ), alors il admet une HZMC comme loi invariante si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} & T((a, b); c)T((a, 0); 0)T((0, b); 0)T((0, 0); c) \\ & = T((0, 0); 0)T((0, b); c)T((a, 0); c)T((a, b); 0) \text{ et} \end{aligned}$$

$$D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$$

où  $D^\eta$  et  $U^\eta$  sont deux matrices obtenues à partir de  $T$  de la façon suivante : soit  $(\nu_a)_{a \in E}$  le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice  $(T((i, i); j))_{i, j \in E}$  et soit  $(\eta_a)_{a \in E}$  le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre maximale de la matrice  $\left( \frac{T((a, a); 0)}{T((a, d); 0)} \nu_a \right)_{d, a \in E}$ , alors, pour tout  $a, b, c \in E$ ,

$$D_{a,c}^\eta = \frac{\sum_\ell \frac{\eta_\ell}{T((a, \ell); 0)} T((a, \ell); c)}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T((a, b'); 0)}} \text{ et } U_{c,b}^\eta = \frac{\frac{\eta_b}{T((0, b); 0)} T((0, b); c)}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T((0, b'); 0)} T((0, b'); c)}.$$

De plus, les deux matrices de transition de la HZMC invariante sont  $D = D^\eta$  et  $U = U^\eta$ .

Dans la suite du Chapitre 1, on généralise ce résultat pour les réseaux  $\mathbb{L} = \mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Pour le réseau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , la condition  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$  devient, pour tout  $1 \leq k \leq \min(|E|, n)$ ,

$$\text{Diagonal}((DU)^k) = \text{Diagonal}((UD)^k).$$

La Figure 4 représente les relations d'implication de l'existence d'une loi markovienne invariante en fonction du réseau  $\mathbb{L}$  sur lequel on l'étudie. On discute également de possibles extensions (conditions suffisantes sur  $T$ ) pour des cas où  $T$  n'est pas à taux positif.

## Description du Chapitre 2 : automates cellulaires probabilistes avec un alphabet général

Ce chapitre a été accepté pour publication dans “Advances in Applied Probability” [Cas16].

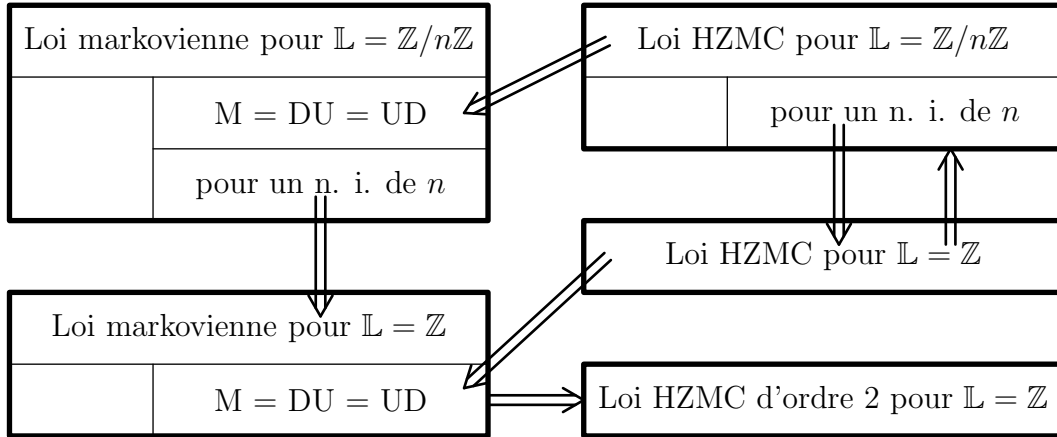


FIGURE 4 – Schéma présentant les implications de l'existence d'une loi invariante markovienne ou HZMC en fonction du réseau  $\mathbb{L}$  d'un ACP  $\mathbf{A}$  de matrice de transition  $T$ . Par exemple, la flèche la plus à droite correspond à la propriété : s'il existe  $M$  tel que pour un nombre infini (n.i.) de  $n$  la loi markovienne de noyau  $M$  sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est invariante pour l'ACP  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E, N, T)$ , alors la loi markovienne de noyau  $M$  sur  $\mathbb{Z}$  est invariante pour l'ACP  $(\mathbb{Z}, E, N, T)$ .

À la suite, de ce premier article, je me suis demandé en quoi l'hypothèse de finitude de l'alphabet était cruciale dans la définition et les résultats concernant les ACP. En particulier, je me suis intéressé à l'ACP de l'Exemple 3.

**Exemple 3.** On se place sur le réseau  $\mathbb{Z}$  avec comme voisinage  $N(i) = (i, i + 1)$ . Pour notre alphabet, on prend  $\mathbb{R}$  et la cellule  $i$  se met à jour de la manière suivante : son nouvel état  $x_{t+1}(i)$  (au temps  $t + 1$ ) est la moyenne de son état  $x_t(i)$  (au temps  $t$ ) et de celle de sa voisine  $x_t(i + 1)$  (au temps  $t$ ) auquel s'ajoute un bruit gaussien  $\varepsilon_{t+1,i} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , i.e.  $x_{t+1}(i) = \frac{x_t(i) + x_t(i+1)}{2} + \varepsilon_{t+1,i}$ . Les  $(\varepsilon_{t,i} : t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z})$  sont i.i.d.

Le lecteur conviendra que cet ACP n'a rien d'ubuesque.

De tels ACP ne sont pas totalement nouveaux. Il existe déjà dans la littérature des automates cellulaires déterministes avec des alphabets infinis qui ont été étudiés. Dans [BMdEOR13], un automate cellulaire avec  $E = [0, 1]$ ,  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$  et  $N(i) = (i, i + 1)$  est utilisé pour résoudre le problème de classification avec une précision arbitraire. Le problème de classification consiste à trouver un automate cellulaire tel que, en partant de toute configuration  $x_0$  de la ligne  $\mathbb{Z}$  colorée par des 0 et des 1, la suite des configurations  $(x_t : t \geq 0)$  converge quand  $t \rightarrow \infty$  vers la ligne remplie que de 0 (resp. que de 1) si dans  $x_0$  la proportion initiale de 0 (resp. de 1) est strictement supérieure à  $1/2$ . Un autre résultat concernant les automates cellulaires à alphabet infini est

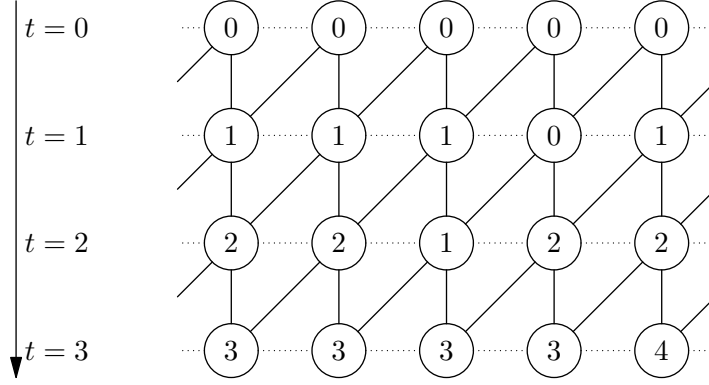


FIGURE 5 – ACP ( $E = \mathbb{N}, \mathbb{L} = \mathbb{Z}, N(i) = (i, i + 1), T$ ) où  $T((a, b); c) = \frac{5}{6} \mathbf{1}_{c=\max(a,b)+1} + \frac{1}{6} \mathbf{1}_{c=a+b}$ . Cet ACP ne possède pas de loi invariante.

l'existence pour certains d'entre eux de jardins d'Eden (configuration qui n'a pas de prédécesseur) [CSC13]. On peut également citer un article qui modélise une dynamique urbaine à l'aide d'un ACP dont l'alphabet  $E$  est infini et continu [VGAA05].

Pour ces ACP avec un alphabet généralisé, je me suis demandé s'il était possible d'obtenir des résultats similaires à ceux du Chapitre 1. J'ai donc cherché à répondre aux questions suivantes : sous quelles conditions sur  $T$  un ACP défini sur un alphabet  $E$  possède-t-il une loi invariante de type markovienne ? Et, si oui, peut-on caractériser son noyau, ses lois finies dimensionnelles, ... ? Pour répondre à ces deux questions, deux difficultés nouvelles sont apparues par rapport au cas où  $E$  est un alphabet fini. La première de ces difficultés est que tout ACP avec un alphabet infini ne possède pas nécessairement une loi invariante, par exemple l'ACP présenté en Figure 5.

La seconde difficulté, qui est la plus compliquée des deux, est liée à la théorie de la mesure sur des espaces continus. Ce problème existe déjà pour les chaînes de Markov à valeurs dans des espaces continus. Donnons un exemple à l'aide d'une chaîne de Markov sur  $\mathbb{R}$  pour l'éclairer.

**Exemple 4.** Soit  $X = (X_t : t \in \mathbb{N})$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de sorte que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$P(X_{t+1} \in B | X_t = a) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2}\right) db.$$

Et on considère une autre chaîne de Markov  $Y = (Y_t : t \in \mathbb{N})$  dont le noyau est le même que celui de  $(X_t : t \in \mathbb{N})$  sauf en la valeur 0 (un ensemble négligeable de  $\mathbb{R}$

pour la mesure de Lebesgue) de sorte que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$P(Y_{t+1} \in B | Y_t = a) = \begin{cases} \mathbf{1}_{0 \in B} & \text{si } a = 0, \\ \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2}\right) db & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière presque sûre, si  $X_0 = Y_0 \neq 0$ , ces deux chaînes de Markov ont des comportements similaires car la probabilité de tomber sur 0 exactement est nulle. En revanche, pour  $X_0 = Y_0 = 0$ , l'évolution des deux chaînes est radicalement différente :  $X_t$  ne vaudra presque sûrement plus jamais 0 dès que  $t > 0$ , alors que, pour tout  $t$ ,  $Y_t = 0$  presque sûrement. En particulier, on en déduit que la Dirac en 0 est une loi invariante pour la chaîne de Markov  $Y$ , mais pas pour la chaîne de Markov  $X$ .

Cet exemple nous montre que deux chaînes de Markov avec des noyaux de transition égaux presque partout peuvent avoir des lois invariantes bien différentes. Ce comportement se produit également sur les ACP. Deux ACP de noyaux de transitions  $T$  et  $T'$  tels que  $T(x; \cdot) = T'(x; \cdot)$  pour Lebesgue presque tout  $x$  peuvent avoir des comportements étrangers l'un à l'autre si initialement on part de certaines configurations bien précises. Cette propriété est un frein à l'étude exhaustive des lois invariantes d'un ACP. Une part importante de mon travail a été d'éclaircir ces différents aspects et d'introduire le bon formalisme pour étudier les ACP définis avec un alphabet général qui sera, comme il est usuel en théorie des probabilités, un espace polonais.

### Contribution

---

Commençons par définir formellement ce qu'est un ACP général. Tout comme pour un ACP avec un alphabet fini, un ACP général (défini avec un alphabet  $E$  polonais) est un quadruplet  $(E, \mathbb{L}, N, T)$  sauf que  $T$  n'est plus une matrice de transition de  $E^{|N|}$  dans  $E$ , mais un noyau de transition de  $E^{|N|}$  dans  $E$ . Un noyau de transition  $T$  d'un espace  $E^d$  dans un espace  $E$  a les propriétés suivantes :

- pour tout  $B \in \mathcal{B}(E)$ , la fonction 
$$\begin{array}{ccc} T_B : & E^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto T(a; B) \end{array}$$
 est  $\mathcal{B}(E^d)$ -mesurable ;
- pour tout  $a \in E$ , la fonction 
$$\begin{array}{ccc} T_a : & \mathcal{B}(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & B & \longmapsto T(a; B) \end{array}$$
 est une mesure de probabilité sur  $E$ .

Pour résoudre la deuxième difficulté présentée précédemment et illustrée par l'exemple 4, nous étudions les ACP  $\mathbf{A}$  à l'aide de mesures  $\mu$   $\sigma$ -finies sur  $E$ . Ces mesures  $\mu$ , dites mesures de référence par la suite, permettent d'identifier des sous-ensembles  $G$  de  $E^{\mathbb{L}}$  sur lequel les ACP  $\mathbf{A}$  sont captifs quand la distribution initiale

$S_{t_0}$  de  $\mathbf{A}$  est prise dans  $G$ . C'est sur ces ensembles  $G$  que l'on pourra identifier par la suite des mesures invariantes.

On dit d'un ACP  $\mathbf{A}$  de noyau de transition  $T$  qu'il est  $\mu$ -supporté si  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $E$  et si, pour  $\mu^d$ -presque tout  $x$ , la mesure  $T(x; \cdot)$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  (noté classiquement  $T(x; \cdot) \ll \mu$ ), et on dit même qu'il est  $\mu$ -positif si, en plus d'être  $\mu$ -supporté, on a  $\mu \ll T(x; \cdot)$  pour  $\mu^d$ -presque tout  $x$ . Pour les ACP  $\mathbf{A}$   $\mu$ -supporté de noyau de transition  $T$ , on peut définir  $t$  la  $\mu$ -

$$\begin{aligned} t : E^d \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{densité de } T \text{ comme la fonction } \mu^{d+1}\text{-mesurable } (x; y) &\longmapsto \frac{dT(x; \cdot)}{d\mu}(y) \quad \text{où} \end{aligned}$$

$\frac{dT(x; \cdot)}{d\mu}$  est la dérivé de Radon-Nikodym de la mesure  $T(x; \cdot)$  par rapport à  $\mu$ . Par la suite, nos théorèmes vont porter sur des ACP  $\mathbf{A}$  et des mesures  $\mu$  pour lesquelles  $\mathbf{A}$  est  $\mu$ -supporté ou  $\mu$ -positif. Grâce à cela, l'étude des ACP avec lois invariantes markoviennes s'en trouve grandement simplifiée.

**Exemple 5.**

- L'ACP  $\mathbf{A}_1$  de l'Exemple 1 peut être étudié à partir de plusieurs mesures de références. Comme première mesure de référence, on prend la mesure de comptage  $\mu_{\{0,1\}} = \delta_0 + \delta_1$  sur  $\{0, 1, 2\}$ . L'ACP  $\mathbf{A}_1$  est  $\mu_{\{0,1\}}$ -supporté, mais pas  $\mu_{\{0,1\}}$ -positif (car  $\mu_{\{0,1\}} \not\ll T(0, 0; \cdot) = \delta_0$ ). En revanche, pour la mesure de référence  $\delta_0$ , l'ACP  $\mathbf{A}_1$  est  $\delta_0$ -positif (car  $T(0, 0; \cdot) = \delta_0$ ).
- Une bonne mesure de référence pour étudier l'ACP  $\mathbf{A}$  de l'Exemple 3 est la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . En effet, l'ACP  $\mathbf{A}$  est  $\lambda$ -positif et la  $\lambda$ -densité  $t$  de son noyau de transition est, pour tout  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$t(a, b; c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( c - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right).$$

Avant d'exprimer un des résultats principaux du Chapitre 2, précisons que l'on arrive également à étendre les notions de  $\mu$ -supporté et de  $\mu$ -positif aux HZMC à valeurs dans un espace polonais  $E$  et à leurs noyaux de transition  $D$  et  $U$ . Dans le Théorème 6 ci-après, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ACP  $\mu$ -positif (un travail en amont sera nécessaire pour trouver une telle mesure  $\mu$  si une telle mesure existe) possède comme loi invariante une loi HZMC  $\mu$ -positive.

**Théorème 6.** *Soit  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur un espace polonais  $E$ . Soit  $\mathbf{A} = (E, \mathbb{N}, N(i) = (i, i+1), T)$  un ACP  $\mu$ -positif.  $\mathbf{A}$  possède une HZMC  $\mu$ -positive invariante si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *il existe un triplet  $(a_0, b_0, c_0) \in E^3$  tel que  $T((a_0, b_0); \cdot) \ll \mu$  et  $\mu \ll T((a_0, b_0); \cdot)$*

et, pour  $\mu^3$ -presque tout  $(a, b, c)$ ,

$$t(a, b; c)t(a_0, b_0; c)t(a_0, b; c_0)t(a, b_0; c_0) = t(a_0, b_0; c_0)t(a, b; c_0)t(a, b_0; c)t(a_0, b; c),$$

— il existe une fonction positive  $\eta \in L^1(\mu)$  solution de : pour  $\mu^2$ -presque tout  $(a, b)$  et pour le couple  $(a_0, c_0)$  de la condition précédente,

$$\frac{\frac{\eta(b)}{t(a, b; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} = \int_E \frac{\frac{\eta(c)}{t(a_0, c; c_0)} t(a_0, c; a)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} d\mu(x)} \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} t(c, x; b) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; a) d\mu(x)} d\mu(c),$$

— la chaîne de Markov de noyau de transition  $D^n$  de  $\mu$ -densité  $d^n$  (voir ci-après) possèdent une (unique) probabilité invariante  $\rho$  avec  $\rho \ll \mu$  et  $\mu \ll \rho$ .

La HZMC invariante a alors pour noyaux de transitions  $D^n$  et  $U^n$  de  $\mu$ -densités  $d^n$  et  $u^n$  (voir ci-après) et comme probabilité initiale  $\rho$ . Les fonctions  $d^n$  et  $u^n$  sont :

$$d^n(a; c) = \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \quad \text{et} \quad u^n(c; b) = \frac{\frac{\eta(b)}{t(a_0, b; c_0)} t(a_0, b; c)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; c) d\mu(x)}.$$

La difficulté pour appliquer ce théorème est concentrée dans le fait qu'il faille trouver une fonction  $\eta$  qui permette de vérifier le deuxième point. C'est en général très compliqué, mais, si la  $\mu$ -densité  $t$  du noyau de transition a de bonnes propriétés (continuité en tout point  $(a, b; c)$  par exemple), on montre alors qu'il existe des moyens de trouver des  $\eta$  candidats à l'aide de calculs utilisant uniquement  $t$  (voir Proposition 2.1.10 du Chapitre 2).

Dans la suite du Chapitre 2, on étend le Théorème 6 aux cas où  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### Physique statistique et description du Chapitre 3 : ACP et les modèles à 6 et 8 sommets

La physique statistique cherche à expliquer le comportement de grands systèmes de particules à l'aide des interactions locales entre ces particules. L'exemple classique étant le modèle d'Ising avec lequel on explique l'aimantation à basse température du fer et sa perte d'aimantation à haute température (comportement macroscopique) grâce à l'énergie locale qui existe entre deux particules voisines dans le métal et qui



varie suivant que les particules ont le même spin ou pas (comportement microscopique). Par ce fait, en général en physique statistique, l'énergie d'une configuration macroscopique est la somme des énergies des interactions locales. Cette dernière propriété est un bon point pour faire des liens entre la physique statistique et les ACP. En effet, la probabilité d'obtenir un certain diagramme espace-temps pour l'ACP est le produit des transitions locales de l'ACP. On a donc dans les deux cas des paramètres locaux (énergie locale/transition locale) qui induisent des comportements globaux (énergie macroscopique/probabilité du diagramme espace-temps). C'est avec cette analogie en tête que je me suis intéressé à faire des liens entre les ACP et la physique statistique et, en particulier, les “vertex-models”.

Les “vertex-models” ou modèles à sommets, et surtout le modèle à 6 sommets, ont été introduits pour modéliser le comportement de la glace en deux dimensions. Nous présentons, dans cette introduction, principalement le modèle à 8 sommets.

Considérons  $K_N$  le graphe dont l'ensemble des sommets est

$$\{(i, j) : -1 \leq i, j \leq N + 1\}$$

et dont l'ensemble des arêtes est

$$\begin{aligned} & \{((i, j), (i, j + 1)) : 0 \leq i \leq N, -1 \leq j \leq N\} \\ & \cup \{((i, j), (i + 1, j)) : -1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N\} \end{aligned}$$

(voir Figure 6). Les sommets

$$\{(i, j) : 0 \leq i, j \leq N\}$$

sont appelés sommets internes de  $K_N$  (ce sont ceux adjacents à 4 arêtes de  $K_N$ ) et les arêtes

$$\begin{aligned} & \{((-1, j), (0, j)) : 0 \leq j \leq N\} \cup \{((N, j), (N + 1, j)) : 0 \leq j \leq N\} \\ & \cup \{((i, -1), (i, 0)) : 0 \leq i \leq N\} \cup \{((i, N), (i, N + 1)) : 0 \leq i \leq N\} \end{aligned}$$

sont appelées arêtes externes. Chaque arête de  $K_N$  peut être orientée de deux manières : “de haut en bas” ou “de bas en haut” si elle est verticale et “de gauche à droite” ou “de droite à gauche” si elle est horizontale. On appelle une orientation de  $K_N$ , une configuration de  $K_N$  dans laquelle toutes ses arêtes ont été orientées. Comme  $K_N$  possèdent  $2N^2 + 2N$  arêtes, il y a donc  $2^{2N^2 + 2N}$  orientations (façons d'orienter les arêtes) différentes de  $K_N$ . Cela donne 16 orientations différentes possibles pour  $K_1$ , énumérées sur la Figure 7. Autour de tout sommet interne  $(x, y)$  de  $K_N$  muni d'une orientation, on va retrouver une de ces 16 configurations possibles : le sommet interne  $(x, y)$  est de type  $i$  quand la configuration observée autour de lui est la configuration

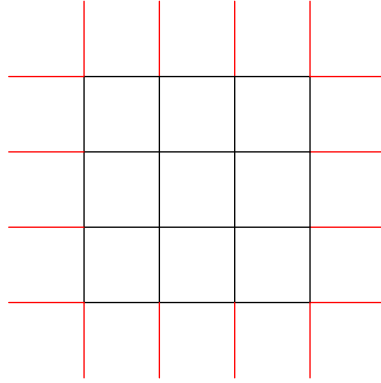


FIGURE 6 – Le carré  $K_4$  avec ces 16 arêtes externes en rouge.

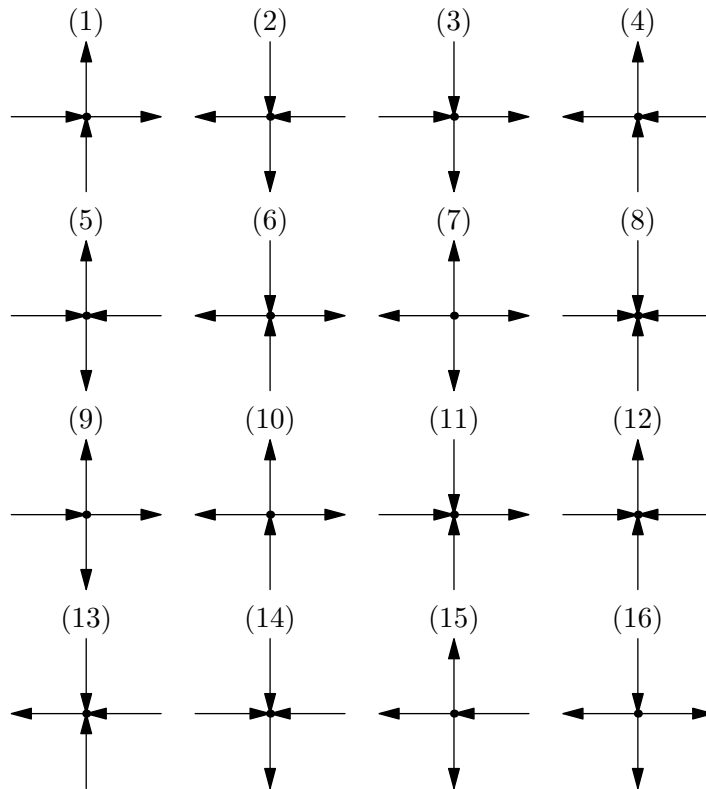


FIGURE 7 – Les 16 orientations possibles de  $K_1$  qui sont les 16 types de sommets possibles dans une orientation de  $K_N$ .

(i) de la Figure 7. Par la suite, on désigne par sommets de  $K_N$  uniquement les sommets internes de  $K_N$ .

Dans les modèles de sommets, un poids “macroscopique” est attribué à chacune des orientations  $O$  de  $K_N$  à partir du type de ses sommets : soit  $O$  une orientation de  $K_N$ , alors le poids de l’orientation  $O$  est

$$W(O) = \prod_{i=1}^{16} w_i^{n_i(O)}$$

où  $w_i$  est le poids d’un sommet de type  $i$  et  $n_i(O)$  le nombre de sommets de type  $i$  dans l’orientation  $O$ . Dans le cas du modèle à 8 sommets, on considère uniquement les orientations telles qu’autour de chaque sommet il y ait un nombre pair (0, 2 ou 4) d’arêtes entrantes. Autrement dit, chaque sommet d’une orientation dans le modèle à 8 sommets sera de type  $i$  pour  $1 \leq i \leq 8$ . Le poids de l’orientation est alors

$$W(O) = \prod_{i=1}^8 w_i^{n_i(O)}$$

(i.e. on a pris  $w_i = 0$  pour  $9 \leq i \leq 16$ ). Une orientation  $O$  est alors choisie avec probabilité

$$\frac{\prod_{i=1}^8 w_i^{n_i(O)}}{Z} \text{ où } Z = \sum_{O', \text{ configurations}} \prod_{i=1}^8 w_i^{n_i(O')}.$$

La dénominateur  $Z$  est appelé fonction de partition. Souvent pour simplifier l’étude du modèle à 8 sommets, on considère que le système vérifie

$$w_1 = w_2 = a, w_3 = w_4 = b, w_5 = w_6 = c \text{ et } w_7 = w_8 = d.$$

À cela, il faut ajouter que les  $4N$  arêtes externes (voir Figure 6) peuvent avoir des conditions imposées dites conditions de bord comme, par exemple, des conditions de bords périodiques pour laquelle que la première arête et la dernière arête de chaque ligne sont dans le même sens et, de même, pour les colonnes.

Le modèle à 6 sommets correspond au modèle à 8 sommets avec  $d = 0$ . Il a été introduit en 1935 par Pauling [Pau35]. Sa fonction de partition a été calculée par Baxter qui en a déduit que le modèle à 6 sommets avait des propriétés très différentes quand  $N \rightarrow \infty$  suivant les valeurs des paramètres  $a, b$  et  $c$ . Un *état stable* du modèle à 6 sommets désigne un sous-espace (de mesure non nulle) de l’ensemble des paramètres  $(a, b, c)$  pour lequel les propriétés asymptotiques (quand  $N \rightarrow \infty$ ) du modèle à 6 sommets sont les mêmes dans ce sous-espace. Le modèle à 6 sommets a 4 états stables [Bax82, Section 8.10] (voir Figure 8) :

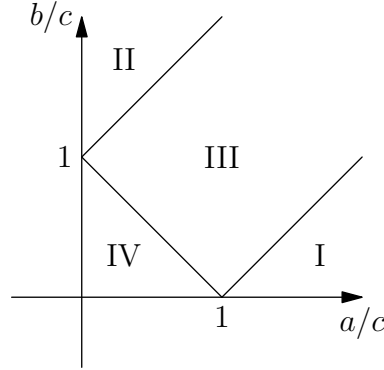


FIGURE 8 – Le diagramme des 4 états macroscopiques du 6-vertex model.

- Si  $a > b + c$  (état I), alors on a un état ferromagnétique, dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 1, soit de type 2 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $b > a + c$  (état II), alors on a encore un état ferromagnétique, mais dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 3, soit de type 4 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $c > a + b$  (état IV), alors on a un état anti-ferromagnétique,  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 5 et  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 6 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Sinon (i.e. si  $a, b, c < (a + b + c)/2$ ) (état III), alors on a un état désordonné, il y a  $\Theta(N^2)$  sommets de chaque type p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .

La fonction de partition du modèle à 8 sommets est également connue et ce modèle a 5 états stables. Les quatres premiers états sont similaires à ceux du modèle à 6 sommets et l'état V est un autre état anti-ferromagnétique, mais dans lequel  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 7 et  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 8 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .

La fonction de partition permet de comprendre le comportement macroscopique d'un modèle, mais ne renseigne pas sur l'influence à longue distance dans ce modèle. Pour cela, on étudie la fonction de corrélation :

$$C(r, t) = E[e(0, 0)e(r, t)] - E[e(0, 0)] E[e(r, t)]$$

où

$$e(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si l'arête } (i, j) \text{ est orientée "de haut en bas" ou "de gauche à droite",} \\ 1 & \text{si l'arête } (i, j) \text{ est orientée "de bas en haut" ou "de droite à gauche"} \end{cases} \quad (4)$$

et  $(0, 0)$  est une arête prise comme référence et  $(r, t)$  est une arête située  $r$  lignes en dessous et  $t$  colonnes à droite de l'arête  $(0, 0)$ . Pour le modèle à 6 sommets, cette fonction a été étudiée par Kandel, Domany et Nienhuis en 1990 [KDN90]. Ils ont prouvé que

**Théorème 7** ([KDN90]). *Dans le cas où  $b = a + c$  et sous certaines conditions (détaillées dans le Chapitre 3), cette fonction vaut*

$$C(r, 2t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2t < r + \Delta(r) \\ \frac{q(1-q)}{2^{2t}} \binom{2t-1}{(2t-r-\Delta(r))/2} & \text{si } 2t \geq r + \Delta(r) \end{cases}$$

avec  $\Delta(r) = 1 + \frac{1 + (-1)^r}{2}$  et  $q$  paramètre dépendant des conditions.

### Contribution

---

Ce chapitre repose sur des travaux en cours.

Dans ce chapitre, nous calculons la fonction de corrélation  $C(i, t)$  du modèle à 8-sommets dans l'état  $a + c = b + d$ .

**Théorème 8.** *Supposons  $a + c = b + d$ . Sous certaines conditions sur le modèle à 8 sommets (précisées dans le Chapitre 3), la fonction de corrélation  $C(i, t)$  est le coefficient en  $l^t x^{i+t}$  dans le développement en série en  $l$  et en  $x$  au voisinage de  $(0, 0)$  de la fraction rationnelle suivante*

$$\frac{1 + l(1 - (p + r) + x(r - p))}{x^2 l^2 (2p - 1)(2r - 1) + l(1 - (p + r))(1 + x^2) + 1}$$

avec  $p = \frac{a}{a + c}$  et  $r = \frac{b}{b + d}$ .

Ces résultats sont récents et j'espère obtenir une formule plus simple des  $C(i, t)$  par la suite.

Pour obtenir le Théorème 7, Kandel, Domany et Nienhuis définissent une orientation aléatoire ligne à ligne de  $\overline{K}_\infty$  (graphe défini dans le Chapitre 3) qui a la même loi que celle définie par le modèle à 6 sommets. Pour obtenir le Théorème 8, nous définissons également une orientation aléatoire de  $\overline{K}_\infty$  ligne à ligne qui a la même loi que celle définie par le modèle à 8 sommets, généralisant ainsi la construction de [KDN90].

Nous établissons un lien – fondamental ici – entre cette loi sur les orientations et une loi sur les diagramme espace-temps d'ACP triangulaires (Lemmes 3.1.9 et 3.1.13).

Les ACP triangulaires sont des cas particuliers d'ACP d'ordre 2. Formellement, un ACP  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 est un quintuplet  $(E, \mathbb{L}, N_1, N_2, T)$  où  $E$  est un alphabet fini,

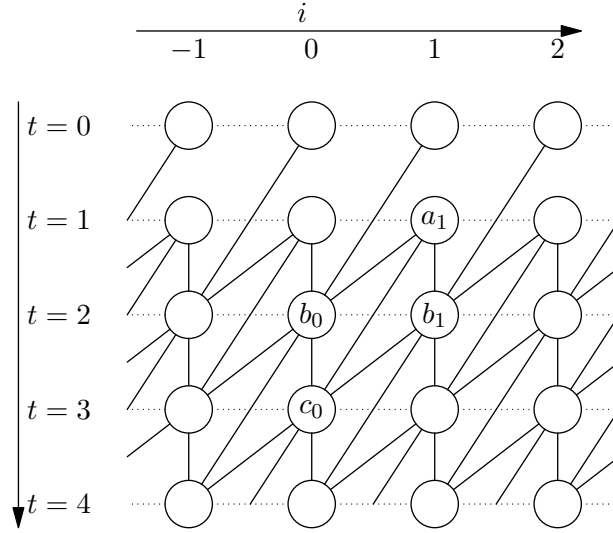


FIGURE 9 – Diagramme espace-temps (vide) d'un ACP triangulaire

$\mathbb{L}$  un réseau,  $N_1$  un fonction de voisinage sur le réseau  $\mathbb{L}$ ,  $N_2$  une autre fonction de voisinage sur le réseau  $\mathbb{L}$  et  $T$  une matrice de transition de  $E^{|N_1|} \times E^{|N_2|}$  dans  $E$ . À partir de ce quintuplet, on construit une chaîne de Markov  $(S_t : t \geq 0)$  d'ordre 2 à valeurs dans  $E^{\mathbb{L}}$  de la façon suivante : pour tout sous-ensemble  $C \subset \mathbb{L}$ , pour tout  $(c_i : i \in C) \in E^C$ ,

$$\begin{aligned} P((S_{t+2}(i) = c_i : i \in C) | S_t = (a_i : i \in \mathbb{L}), S_{t+1} = (b_i : i \in \mathbb{L})) \\ = \prod_{i \in C} T((a_j : j \in N_1(i)), (b_{j'} : j' \in N_2(i)); c_i). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$ ,  $N_1(i) = (i + 1)$  et  $N_2(i) = (i, i + 1)$ , on parle alors d'ACP triangulaire car la représentation du diagramme espace-temps (voir Figure 9) est le réseau triangulaire. Pour plus de clarté par rapport au réseau triangulaire, nous adopterons les notations plus compactes suivantes  $T(b_i, a_i, b_{i+1}; c_i)$  au lieu de  $T((a_{i+1}), (b_i, b_{i+1}); c_i)$ .

Une partie du Théorème 8 repose sur des avancées dans le domaine des ACP triangulaires. On montre qu'il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles les ACP triangulaires admettent une loi invariante  $(D, U)$ -HZMC si  $D = U$  ou si  $E$  est de cardinal 2.

**Théorème 9.** Soit  $T(a, b, c; d)$  la matrice de transition d'un ACP triangulaire à alphabet  $E$  fini à taux positif. Pour tout  $a, c \in E$ , on note  $(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E)$  le

vecteur propre à gauche (associé à la valeur propre 1) de  $(T(a, b, c; d))_{b,d}$ . L'ACP triangulaire de matrice de transition  $T$  a une de ses lois invariantes de type HZMC ssi  $\tilde{T}(a, c; \cdot)$  vérifie les conditions du Théorème 2 avec  $D^\eta = U^\eta$ . Dans ce cas, la HZMC invariante a pour noyaux  $(D^\eta, U^\eta)$ .

**Théorème 10.** Soit  $T(a, b, c; d)$  la matrice de transition d'un ACP triangulaire à alphabet  $E = \{0, 1\}$  à taux positif. Pour tout  $a, c$ , on note  $(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E)$  le vecteur propre à gauche (associé à la valeur propre 1) de  $(\sum_d T(c, b, a; d)T(a, d, c; e))_{b,e}$ . L'ACP triangulaire de matrice de transition  $T$  possède une loi invariante de type HZMC ssi  $\tilde{T}$  vérifie

$$\tilde{T}(0, 0; 0)\tilde{T}(1, 1; 0)\tilde{T}(1, 0; 1)\tilde{T}(0, 1; 1) = \tilde{T}(1, 1; 1)\tilde{T}(0, 0; 1)\tilde{T}(0, 1; 0)\tilde{T}(1, 0; 0)$$

et, pour le  $(D^\eta, U^\eta)$  trouvé en appliquant le Théorème 2 à  $\tilde{T}$ , on a, pour tout  $a, c, d \in \{0, 1\}$ ,

$$D^\eta(a; d)U^\eta(d; c) = \sum_{b=0}^1 U^\eta(c; b)D^\eta(b; a)T(a, b, c; d).$$

Dans ce cas, la HZMC invariante a pour noyaux  $(D^\eta, U^\eta)$ .

À l'aide des Théorèmes 9 et 10, on peut identifier des ACP pour lesquels on peut calculer une mesure invariante. Par le lien entre le modèle à 8 sommets quand il satisfait  $a + c = b + d$  et sous de bonnes conditions de bord, et un ACP triangulaire (Lemme 3.1.9), on obtient alors la propriété suivante : pour tout  $t \geq 0$ , les orientations des arêtes de la  $t$ ème ligne de  $\overline{K}_\infty$  sont indépendantes ce qui nous permet, in fine, d'obtenir la formule dans le Théorème 8.

## Partie II : Processus itérés

### Mouvement Brownien itéré et description du Chapitre 4 : Processus itérés

Ce chapitre est issu d'une collaboration avec Jean-François Marckert et a été soumis pour publication [CM15b].

En 1993, Burzdy a étudié le processus  $I^{(2)}(t) = B_2(B_1(t))$  où  $B_1$  et  $B_2$  sont deux mouvements browniens bilatéraux indépendants<sup>a</sup>. Une des motivations de cette recherche est que ce processus est utile pour construire des solutions à des équations

a. Un mouvement brownien  $B(t)$  est bilatéral si  $(B(t); t \geq 0)$  et  $(B(-t); t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens standard indépendants.

différentielles paraboliques [Fun79]. Dans les années 1990, ce processus a connu une certaine popularité et de nombreux probabilistes en ont étudié différentes propriétés : temps local, logarithme itéré, etc. [Bur93, Ber96, ES99, BK95, Xia98, KL99].

En 2004, Turban a étudié le mouvement brownien itéré  $n$  fois

$$I^{(n)}(t) = B_n(B_{n-1}(\dots B_1(t) \dots))$$

où  $B_1, \dots, B_n$  sont  $n$  mouvements browniens bilatéraux indépendants. Il s'est, en particulier, intéressé à la limite de ce processus quand  $n$  tend vers l'infini. Il a montré que, pour tout  $t \neq 0$ ,  $I^{(n)}(t) \rightarrow I_1 \sim \varepsilon \mathcal{E}$  quand  $n \rightarrow \infty$  où  $\varepsilon$  est un signe aléatoire uniforme<sup>a</sup> et  $\mathcal{E}$  suit une loi exponentielle de paramètre 2 [Tur04].

En 2014, Curien et Konstantopoulos ont poursuivi cette étude et montré la convergence des lois finies-dimensionnelles.

**Théorème 11** (Théorème 2 de [CK14]). *Pour tout  $k$ , pour tout  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  non nuls et distincts,  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  converge en distribution. La distribution limite  $\mu_k$  ne dépend pas de  $(t_1, \dots, t_k)$  et est invariante par permutation.*

*De plus, si  $(I_1, \dots, I_k) \sim \mu_k$ , alors  $(B(I_1), \dots, B(I_k)) \sim \mu_k$  et aussi  $(I_2 - I_1, \dots, I_k - I_1) \sim \mu_{k-1}$ .*

Ils ont également montré l'existence de la limite de la suite des mesures d'occupations des  $I^{(n)}$  sur  $[0, 1]$ . Leur preuve de la convergence des lois finies-dimensionnelles repose sur les fonctions de Lyapunov et le critère de Foster [MT09, Théorème 13.0.1] et montre l'ergodicité des chaînes de Markov  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k) : n \geq 0)$  à  $(t_1, \dots, t_k)$  fixé.

D'abord motivés par une description explicite des lois  $\mu_k$ , nous avons cherché de nouvelles propriétés du mouvement brownien itéré ad libitum. Nous avons par la suite étendu nos recherches à d'autres processus itérés, notamment aux processus  $\alpha$ -stables itérés, pour lesquels nos techniques s'appliquaient.

## Contribution

Dans ce chapitre, il y a deux contributions majeures. La première est une extension du théorème de Curien et Konstantopoulos aux processus  $\alpha$ -stables itérés à l'infini. La seconde est une description des lois finies-dimensionnelles  $\mu_k$  du mouvement brownien itéré ad libitum.

Les processus  $(X(t) : t \geq 0)$  stables considérés ici sont définis à partir de trois paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$  ( $\alpha \in [0, 2]$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  et  $r \in \mathbb{R}$ ) et vérifient :

- $X(0) = 0$ ,
- les accroissements sont indépendants et stationnaires,

---

a.  $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$ .



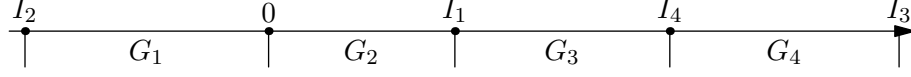


FIGURE 10 –  $(G_1, \dots, G_k)$  sont les écarts de  $(0, I_1, \dots, I_k)$ .

— la transformée de Fourier du processus est

$$\phi_{X(t)}(u) = E[e^{iuX(t)}] = e^{t\eta(u)}$$

avec  $\eta(u) = -|u|^\alpha \sigma^\alpha + i r u$ .

On définit l'itéré  $n$  fois d'un processus stable de paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$  ainsi : soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  processus stables bilatéraux indépendants de paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$ <sup>a</sup>, le processus itéré  $n$  fois est alors  $I^{(n)}(t) = X_n(X_{n-1}(\dots X_1(t) \dots))$ . Un premier résultat du Chapitre 4 est de caractériser les valeurs de  $(\alpha, \sigma, r)$  pour lesquelles la suite des  $(I^{(n)} : n \geq 0)$  converge (au niveau des lois finies-dimensionnelles) quand  $n$  tend vers l'infini.

**Théorème 12.** *Soit  $(I^{(n)} : n \geq 0)$  une suite de processus stables itérés  $n$  fois de paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$ . Soit  $k \geq 1$  et  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  différents et non nuls.*

- *Si  $\alpha \leq 1$ , alors, pour tout  $r$ ,  $I^{(n)}(t_1)$  ne converge pas en loi dans  $\mathbb{R}$ .*
- *Si  $1 < \alpha \leq 2$  et  $|r| > 1$ , alors  $I^{(n)}(t_1)$  ne converge pas en loi dans  $\mathbb{R}$ .*
- *Si  $1 < \alpha \leq 2$  et  $|r| < 1$ , alors  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  converge en loi. La distribution limite  $\mu_k$  ne dépend pas des  $t_i$  et est échangeable. De plus, si  $(I_1, \dots, I_k) \sim \mu_k$ , alors  $(X(I_1), \dots, X(I_k)) \sim \mu_k$  où  $X$  est un processus stable bilatéral de paramètre  $(\alpha, \sigma, r)$  et, également,  $(I_2 - I_1, \dots, I_k - I_1) \sim \mu_{k-1}$ .*

Précisons que les lois  $\mu_k$  du Théorème 12 dépendent de  $(\alpha, \sigma, r)$ .

Dans le cas où l'on a convergence en loi, on s'est alors posé la question : à quoi ressemblent les lois  $\mu_k$  ? Pour cela, on est parti de  $(I_1, \dots, I_k) \sim \mu_k$  et l'idée novatrice a été de regarder les écarts de cette suite. Les  $k$  écarts de  $k+1$  nombres réels  $(a_0, \dots, a_k)$  sont les  $k$  différences  $(\hat{a}_1 - \hat{a}_0, \hat{a}_2 - \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k - \hat{a}_{k-1})$  entre les points triés dans l'ordre croissant  $\hat{a}_0 \leq \hat{a}_1 \leq \dots \leq \hat{a}_k$  et  $\{a_0, \dots, a_k\} = \{\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_k\}$ . Plus précisément, pour décrire la loi  $\mu_k$ , on a étudié la loi  $\gamma_k$  des écarts de  $(G_1, \dots, G_k)$ , les  $k$  écarts de  $(0, I_1, \dots, I_k)$  où  $(I_1, \dots, I_k) \sim \mu_k$ . Une illustration des écarts  $(G_1, \dots, G_k)$  de  $(0, I_1, \dots, I_k)$  est montrée en Figure 10.

Une première propriété importante est qu'à partir de la loi  $\gamma_k$  on retrouve la loi  $\mu_k$  :

---

a.  $X(t)$  est un processus stable bilatéral de paramètre  $(\alpha, \sigma, r)$  si  $(X(t) : t \geq 0)$  et  $(-X(-t) : t \geq 0)$  sont des processus stables de paramètres  $(\alpha, \sigma, \mathbb{R})$ .

**Proposition 13.** *Si  $(G_1, \dots, G_k) \sim \gamma_k$  et  $\tau$  une permutation aléatoire uniforme de l'ensemble  $\llbracket 0, k \rrbracket$  indépendante de  $(G_1, \dots, G_k)$ , alors*

$$\left( \sum_{l=1}^{\tau(i)} G_l - \sum_{l=1}^{\tau(0)} G_l : 1 \leq i \leq k \right) \sim \mu_k.$$

Cette propriété est vraie pour toutes les processus  $\alpha$ -stables de paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$  itérés ad libitum avec  $\alpha < 1$  et  $|r| < 1$ .

On montre ensuite que la loi  $\gamma_k$  est l'unique loi invariante pour le noyau de Markov  $\Psi$  défini par, pour tout  $g = (g_1, \dots, g_k) \in ]0, \infty[^k$  et  $g' = (g'_1, \dots, g'_k) \in ]0, \infty[^k$ ,

$$\Psi(g[k]; g'[k]) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}[\llbracket 0, k \rrbracket]} \prod_{i=1}^k \Phi_{g_i} \left( \sum_{l=1}^{\tau(i)} g'_l - \sum_{l=1}^{\tau(i-1)} g'_l \right)$$

où  $\mathcal{S}[\llbracket 0, k \rrbracket]$  est l'ensemble des permutations de  $\{0, 1, \dots, k\}$  et  $\Phi_{g_i}$  est la densité de la loi de  $X(g_i)$  avec  $X$  un processus  $\alpha$ -stable de paramètres  $(\alpha, \sigma, r)$ .

Dans le cas du mouvement brownien itéré ad libitum,  $\Psi$  possède une propriété remarquable :

**Proposition 14.** *Soit  $(X_1, \dots, X_k)$   $k$  variables indépendantes tel que, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $X_i$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ . Alors la loi de  $(Y_1, \dots, Y_k)$ , l'image de  $(X_1, \dots, X_k)$  par le noyau de Markov  $\Psi$ , est la suivante : pour toute permutation  $\tau$  de  $\llbracket 0, k \rrbracket$ , avec probabilité  $w_\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $(Y_1, \dots, Y_k)$  sont  $k$  variables indépendantes et, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $Y_i$  suit une loi exponentielle de paramètre  $F_{\tau,i}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  avec*

$$F_{\tau,i}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_{j \in E_{\tau,i}} \sqrt{2\lambda_j},$$

$$w_\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k \frac{\sqrt{2\lambda_i}}{F_{\tau,i}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \text{ et}$$

$$E_{\tau,i} = \{j : \min(\tau(j-1), \tau(j)) < i \leq \max(\tau(j-1), \tau(j))\}.$$

Autrement dit, le noyau de Markov  $\Psi$  envoie un  $k$ -uplets de variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles sur un mélange de  $k$ -uplets de même type. En particulier un corollaire de cette propriété est que, en appelant  $\mathbf{MEX}_k$  l'ensemble des mélanges de  $k$ -uplets de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle ( $\mathbf{MEX}_k$  est alors un sous-ensemble de l'ensemble des mesures sur  $]0, \infty[^k$ ),  $\mathbf{MEX}_k$  est stable par le noyau de Markov  $\Psi$ . Ce qui induit que  $\gamma_k \in \mathbf{MEX}_k$  car  $\gamma_k$  est la loi invariante de  $\Psi$ . En fait, on peut encore aller plus loin en se rendant compte que

dans la Proposition 14,  $\Psi$  ne fait que transformer les paramètres  $\lambda = (\lambda_i : 1 \leq i \leq k)$  des exponentielles indépendantes en de nouveaux paramètres  $F_\tau(\lambda) = (F_{\tau,i}(\lambda) : 1 \leq i \leq k)$  avec probabilité  $w_\tau(\lambda)$  pour toute permutation  $\tau$ . Cela permet ainsi de relier  $\gamma_k$  à la probabilité invariante  $\nu_k$  d'une chaîne de Markov  $\Lambda = (\Lambda_t : t \geq 0)$  à valeurs dans  $]0, \infty[^k$  dont le noyau est :

$$P(\Lambda_{t+1} = \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k) | \Lambda_t = \lambda) = \sum_{\tau} w_\tau(\lambda) \mathbf{1}_{\lambda' = F_\tau(\lambda)}.$$

Une chaîne de Markov avec un noyau de cette forme s'appelle un IFS, pour Système de Fonctions Itérées. Un IFS est une chaînes de Markov  $(X_t : t \geq 0)$  définie à valeurs dans un espace polonais  $E$  à partir d'un ensemble fini de fonctions  $\{f_i : 1 \leq i \leq N\}$  de  $E$  dans  $E$  et de probabilités  $(p_a : a \in E)$  sur  $\{1, \dots, N\}$  de tel sorte que, pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $a \in E$ , si  $X_t = a$ , alors  $X_{t+1} = f_i(a)$  avec probabilité  $p_a(i)$ . Dans le cas de l'IFS  $\Lambda$ , on prouve, par un argument de compacité, l'existence d'une loi invariante  $\nu_k$  et que le support de cette loi est contenu dans le compact  $[2, 2k^2]^k$ . Malheureusement, les lois invariantes des IFS ont été très peu étudiées et nous savons ainsi que très peu de choses sur  $\nu_k$ .

En résumé, nous réduisons l'étude de la loi  $\mu_k$  de  $(I_1, \dots, I_k)$  à l'étude de  $\nu_k$ , la loi invariante d'un IFS (une chaîne de Markov simple) sur  $]0, \infty[^k$ , mais sur laquelle nous ne savons hélas pas grand chose.

En fait, cette démarche permet aussi d'avancer sur la compréhension des lois  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  du mouvement brownien itéré  $n$  fois. L'idée est de partir de points aléatoires  $(T_1, \dots, T_k)$  ayant des écarts qui suivent des lois exponentielles, puis de se servir d'un raffinement de la Proposition 14, pour calculer la loi de  $(I^{(n)}(T_1), \dots, I^{(n)}(T_k))$ . À partir de cette loi, on peut alors calculer, pour toute fonction  $f$  bornée de  $\mathbb{C}^k$  dans  $\mathbb{C}$ , les transformées de Laplace de  $f(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  pour tout  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ .

Une partie de nos résultats s'étend aussi à d'autres processus que le mouvement brownien itéré. Il est ainsi possible de reprendre les preuves pour décrire les lois finies-dimensionnelles du mouvement brownien réfléchi (le mouvement brownien réfléchi est la valeur absolue d'un mouvement brownien) itéré  $n$  fois ou ad libitum.

---

Première partie

# Automates cellulaires probabilistes



## Chapitre 1

**Automates cellulaires probabilistes  
à alphabet fini et lois invariantes  
markoviennes.**

## 1.1 Introduction

We start with some formal definitions. *Cellular automata* (CA) are dynamical systems in which space and time are discrete. A CA is a 4-tuple  $A := (\mathbb{L}, E_\kappa, N, f)$  where:

- $\mathbb{L}$  is the lattice, the set of cells. It will be  $\mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in the paper,
- $E_\kappa = \{0, 1, \dots, \kappa\}$  for some  $\kappa \geq 1$ , is the set of states of the cells,
- $N$  is the neighbourhood function: for  $x \in \mathbb{L}$ ,  $N(x)$  is a finite sequence of elements of  $\mathbb{L}$ , the list of neighbours of  $x$ ; its cardinality is  $|N|$ . Here,  $N(x) = (x, x+1)$  when  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$  and  $N(x) = (x, x+1 \bmod n)$  when  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- $f$  is the *local rule*. It is a function  $f : E_\kappa^{|N|} \rightarrow E_\kappa$ .

The CA  $A = (\mathbb{L}, E_\kappa, N, f)$  defines a global function  $F : E_\kappa^{\mathbb{L}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{L}}$  on the set of configurations indexed by  $\mathbb{L}$ . For any  $S_0 = (S_0(x), x \in \mathbb{L})$ ,  $S_1 = (S_1(x), x \in \mathbb{L}) := F(S_0)$  is defined by

$$S_1(x) = f([S_0(y), y \in N(x)]), \quad x \in \mathbb{L}.$$

In words the states of all the cells are updated simultaneously. The state  $S_1(x)$  of  $x$  at time 1 depends only on the states  $S_0(x)$  and  $S_0(x+1)$  of its neighbours at time 0. Starting from configuration  $\eta \in E_\kappa^{\mathbb{L}}$  at time  $t_0$ , meaning  $S_{t_0} = \eta$ , the sequence of configurations

$$S := (S_t = (S(x, t), x \in \mathbb{L}), t \geq t_0), \quad (1.1)$$

where  $S_{t+1} := F(S_t)$  for  $t \geq t_0$ , forms what we call the space-time diagram of  $A$ .

*Probabilistic cellular automata* (PCA) are generalisations of CA in which the states  $(S(x, t), x \in \mathbb{L}, t \geq t_0)$  are random variables (r.v.) defined on a common probability space  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , each of the r.v.  $S(x, t)$  taking a.s. its values in  $E_\kappa$ . Seen as a random process,  $S$  is equipped with the  $\sigma$ -fields generated by the cylinders. In PCA the local deterministic function  $f$  is replaced by a transition matrix  $T$  which gives the distribution of the state of a cells at time  $t+1$  conditionally on those of its neighbours at time  $t$ :

$$P(S(x, t+1) = b \mid [S(y, t), y \in N(x)] = [a_1, \dots, a_{|N|}]) = T_{(a_1, \dots, a_{|N|}), b}. \quad (1.2)$$

Conditionally on  $S_t$ , the states in  $(S(x, t+1), x \in \mathbb{L})$  are independent.

The transition matrix (TM) is then an array of non negative numbers

$$T = \left( T_{(a_1, \dots, a_{|N|}), b} \right)_{((a_1, \dots, a_{|N|}), b) \in E_\kappa^{|N|} \times E_\kappa}, \quad (1.3)$$

satisfying  $\sum_{b \in E_\kappa} T_{(a_1, \dots, a_{|N|}), b} = 1$  for any  $(a_1, \dots, a_{|N|}) \in E_\kappa^{|N|}$ .

Formally a PCA is a 4-tuple  $A := (\mathbb{L}, E_\kappa, N, T)$ . Instead of considering  $A$  as a random function on the set of configurations  $E_\kappa^\mathbb{L}$ ,  $A$  is considered as an operator on the set of probability laws  $\mathcal{M}(E_\kappa^\mathbb{L})$  on the configuration space. If  $S_0$  has law  $\mu_0$  then the law of  $S_1$  will be denoted by  $\text{Tr}(\mu_0)$ : the meaning of this depends on the lattice  $\mathbb{L}$ , but this latter will be clear from the context. The process  $(S_t, t \geq t_0)$  is defined as a time-indexed MC, the law of  $S_{t+1}$  knowing  $\{S_{t'}, t' \leq t\}$  is the same as that knowing  $S_t$  only: conditionally on  $S_t = \eta$ , the law of  $S_{t+1}$  is  $\text{Tr}(\delta_\eta)$ , where  $\delta_\eta$  is the Dirac measure at  $\eta$ . A measure  $\mu \in \mathcal{M}(E_\kappa^\mathbb{L})$  is said to be invariant for the PCA  $A$  if  $\text{Tr}(\mu) = \mu$ . We will simply say that  $\mu$  is invariant by  $T$  when no confusion on the lattice  $\mathbb{L}$  exists.

The literature on CA, PCA, and asynchronous PCA is huge. We here concentrate on works related to PCA's only, and refer to Kari [Kar05] for a survey on CA (see also Ganguly & al. [GSD<sup>+</sup>03] and Bagnoli [Bag98]), to Wolfram [Wol94] for asynchronous PCA and to Liggett [Lig85] for more general interacting particle systems. For various links with statistical mechanics, see Chopard & al. [CLM98], Lebowitz & al. [LMS90]. PCA are studied by different communities: in statistical mechanics and probability theory in relation with particle systems as Ising (Verhagen [Ver76]), hard particles models (Dhar [Dha82, Dha86]), Gibbs measures ([DP92, DPLR02, TVS<sup>+</sup>90, Lou02]), percolation theory, in combinatorics ([Dha82, Dha86, BM98, LBM07, Alb09, Mar12]) where they emerge in relation with directed animals, and in computer science around the problem of stability of computations in faulty CA (the set of CA form a Turing-complete model of computations), see e.g. Gács [Gá01], Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90]. In a very nice survey Mairesse & Marcovici [MM14a] discuss these different aspects of PCA (see also the PhD thesis of Marcovici [Mar13]).

**Notation .** The set of PCA on the lattice  $\mathbb{L}$  equal to  $\mathbb{Z}$  (or  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) and neighbourhood function  $N(x) = (x, x+1)$  (or  $N(x) = (x, x+1 \bmod n)$ ) with set of states  $E_\kappa$  will be denoted by  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)$ . This set is parametrised by the set of TM  $\{(T_{(a,b),c}, (a,b,c) \in E_\kappa^3)\}$ . A TM  $T$  which satisfies  $T_{(a,b),c} > 0$  for any  $a, b, c \in E_\kappa$  is called a positive rate TM, and a PCA  $A$  having this TM will also be called a positive rate PCA. The subset of  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)$  of PCA with positive rate will be denoted by  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)^*$ . In order to get more compact notation, on which the time evolution is more clearly represented, we will write  $T_{a,b,c}$  instead of  $T_{(a,b),c}$ .

Given a PCA  $A := (\mathbb{L}, E_\kappa, N, T)$  the first question arising is that of the existence, uniqueness and description of the invariant distribution(s) and when the invariant distribution is unique, the question of convergence to this latter. Apart the existence which is always guarantied (see Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, Prop.2.5 p.25]), important difficulties arise here and finally very little is known. In most cases, no description is known for the (set of) invariant distributions, and the question of ergodicity in



general is not solved: the weak convergence of  $T^m(\mu)$  when  $m \rightarrow +\infty$  to a limit law independent from  $\mu$  is only partially known for some TM  $T$ 's even when  $\kappa = 1$ , as discussed in Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, Part 2, Chapters 3–7], and Gács [Gá01] for a negative answer in general. Besides the existence of a unique invariant measure does not imply ergodicity (see Chassaing & Mairesse [CM11]).

For  $A$  in  $\text{PCA}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_\kappa)$  the situation is different since the state space is finite. When  $A \in \text{PCA}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_\kappa)^*$  the MC  $(S_t, t \geq 0)$  is aperiodic and irreducible and then owns a unique invariant distribution which can be computed explicitly for small  $n$ , since  $\mu = \text{Tr}(\mu)$  is a linear system.

### 1.1.1 The structures

We present now the *geometric structures* that will play a special role in the paper. The  $t$ th (horizontal) line on the space-time diagram is

$$H_t := \{(x, t), x \in \mathbb{Z}\},$$

and we write  $H_t(n) := \{(x, t), x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$  for a line on the space-time diagram in the cyclic case. The  $t$ th *horizontal zigzag* on the space-time diagram is

$$\text{HZ}_t := \left\{ \left( \lfloor x/2 \rfloor, t + \frac{1 + (-1)^{x+1}}{2} \right), x \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (1.4)$$

as represented on Figure 1.1. Define also  $\text{HZ}_t(n)$  by taking  $(\lfloor x/2 \rfloor \bmod n)$  instead

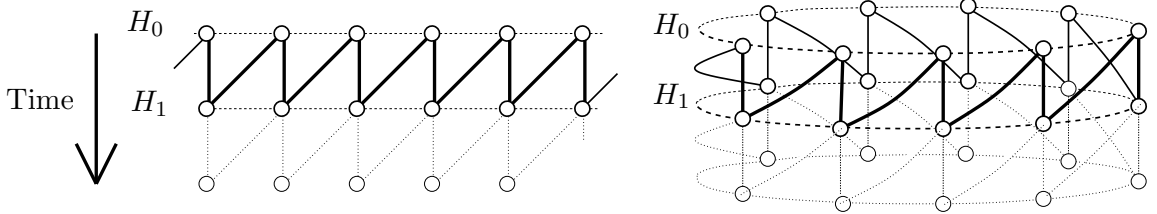


Figure 1.1 – Illustration of  $\text{HZ}_t$ , composed with  $H_t$  and  $H_{t+1}$ , and  $\text{HZ}_t(n)$ , composed by  $H_t(n)$  and  $H_{t+1}(n)$  in the case  $t = 0$ .

of  $\lfloor x/2 \rfloor$  in (1.4). Since  $\text{HZ}_t$  is made by the two lines  $H_t$  and  $H_{t+1}$ , a PCA  $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  on  $\mathbb{Z}$  can be seen as acting on the configuration distributions on  $\text{HZ}_t$ . A transition from  $\text{HZ}_t$  to  $\text{HZ}_{t+1}$  amounts to a transition from  $H_{t+1}$  to  $H_{t+2}$ , with the additional condition that the first line of  $\text{HZ}_{t+1}$  coincides with the second line of  $\text{HZ}_t$  (the transition probability is 0 if this is not the case) (see also the proof of Theorem 1.2.1 for more details).

### 1.1.2 A notion of Markovianity per structure

We first fix the matrix notation:  $[A_{x,y}]_{a \leq x, y \leq b}$  refers to the square matrix with size  $(b - a + 1)^2$ ; the row index is  $x$ , the column one is  $y$ . The row vectors (resp. column vectors) will be written  $[v_x]_{a \leq x \leq b}$  (resp.  ${}^t[v_x]_{a \leq x \leq b}$ ).

We define here what we call MC on  $H$ ,  $H(n)$ ,  $HZ$  and  $HZ(n)$ . As usual a MC indexed by  $H_t$  is a random process  $(S(x, t), x \in \mathbb{Z})$  whose finite dimensional distribution are characterised by  $(\rho, M)$ , where  $\rho$  is an initial probability distribution  $\rho := [\rho_a]_{a \in E_\kappa}$  and  $M := [M_{a,b}]_{0 \leq a, b \leq \kappa}$  a Markov kernel (MK) as follows:

$$P(S(i, t) = a_i, n_1 \leq i \leq n_2) = \rho_{a_{n_1}} \prod_{i=n_1}^{n_2-1} M_{a_i, a_{i+1}},$$

where  $\rho$  may depend on the index  $n_1$ . Observing what happens far away from the starting point, one sees that if the law of a  $(\rho, M)$ -MC with MK  $M$  is invariant under a PCA  $A$  with TM  $T$  on the line, then the law of a  $(\rho', M)$ -MC with MK  $M$  is invariant too, for  $\rho'$  an invariant distribution for  $M$ . For short, in the sequel we will simply write  $M$ -MC and will specify the initial distribution when needed.

A process  $S_t$  indexed by  $HZ_t$  and taking its values in  $A$  is said to be Markovian if there exists a probability measure  $\rho := (\rho_x, x \in E_\kappa)$  and two MK  $D$  and  $U$  such that, for any  $n \geq 0$ , any  $a_i \in E_\kappa, b_i \in E_\kappa$ ,

$$P(S(i, t) = a_i, S(i, t+1) = b_i, 0 \leq i \leq n) = \rho_{a_0} \left( \prod_{i=0}^{n-1} D_{a_i, b_i} U_{b_i, a_{i+1}} \right) D_{a_n, b_n} \quad (1.5)$$

in which case  $\rho$  is said to be the initial distribution. Again we are interested in shift invariant processes. We then suppose that  $\rho$  is an invariant measure for the MK  $DU$  in the sequel, that is  $\rho = \rho DU$ . We will call such a process a  $(\rho, D, U)$ -HZMC (horizontal zigzag MC), or for short a  $(D, U)$ -HZMC. HZMC correspond to some Gibbs measures on  $HZ$  (see e.g. Georgii [Geo11, Theo. 3.5]).

A process  $S_t$  indexed by  $H_t(n)$  and taking its values in  $E_\kappa$  is called a cyclic Markov chain (CMC) if there exists a MK  $M$  such that for all  $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in E_n$ ,

$$P(S(i, t) = a_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Z_n^{-1} \prod_{i=0}^{n-1} M_{a_i, a_{i+1 \bmod n}} \quad (1.6)$$

where  $Z_n = \text{Trace}(M^n)$ . The terminology *cyclic MC* is borrowed from Albenque [Alb09]. Again, it corresponds to Gibbs distributions on  $H(n)$  [Geo11, Theo. 3.5]. For two MK  $D$  and  $U$ , a process  $S$  indexed by  $HZ_t(n)$  and taking its values in  $E_\kappa$  is said to be a

$(D, U)$ -cyclic MC (HZCMC) if for any  $a_i \in E_\kappa, b_i \in E_\kappa$ ,

$$P(S(i, t) = a_i, S(i, t + 1) = b_i, 0 \leq i \leq n - 1) = Z_n^{-1} \left( \prod_{i=0}^{n-1} D_{a_i, b_i} U_{b_i, a_{i+1 \bmod n}} \right) \quad (1.7)$$

where  $Z_n = \text{Trace}((DU)^n)$ .

We will also call product measure, a measure of the form  $\mu(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k \nu_{x_i}$  for any  $k \geq 1$ ,  $(x_1, \dots, x_k) \in E_\kappa^k$ , for some non negative  $\nu_x$  such that  $\sum_{x \in E_\kappa} \nu_x = 1$ .

### 1.1.3 References and contributions of the present paper

In the paper our main contribution concerns the case  $\kappa > 1$ . Our aim is to characterize the PCA, or rather the TM, which possesses the law of a MC as invariant measure. The approach is mainly algebraic. Above we have brought to the reader attention that (different) PCA with same TM  $T$  may be defined on each of the structure  $H$ ,  $H(n)$ ,  $HZ$  and  $HZ(n)$ . The transitions  $T$  for which they admit a Markovian invariant distribution depends on the structure. A part of the paper is devoted to these comparisons, the conclusions being summed up in Figure 1.2, in Section 1.3.

The main contribution of the present paper concerns the full characterisation of the TM with positive rates for which there exists a Markovian invariant distribution on, on the one hand,  $HZ$  and, on the other hand,  $HZ(n)$  (some extensions are provided in Section 1.2.2). One finds in the literature two main families of contributions in the same direction. We review them first before presenting our advances.

The first family of results we want to mention is the case  $\kappa = 1$  for which much is known.

#### Case $\kappa = 1$ . Known results

Here is to the best of our knowledge the exhaustive list of existing results concerning PCA having the law of a MC as invariant measure on  $H$ ,  $H(n)$ ,  $HZ$  or  $HZ(n)$  for  $\kappa = 1$  and  $N(x) = (x, x + 1)$ .

On the line  $H$ : The first result we mention is due to Belyaev & al. [BGM69] (see also Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, section 16]). A PCA  $A = (\mathbb{Z}, E_1, N, T) \in \text{PCA}(\mathbb{Z}, E_1)^*$  (with positive rate) admits the law of a MC on  $H$  as invariant measure if and only if (iff) any of the two following conditions hold:

- (i)  $T_{0,0} T_{1,1} T_{1,0} T_{0,1} = T_{1,1} T_{0,0} T_{0,1} T_{1,0}$ ,
- (ii)  $T_{0,1} T_{1,0} = T_{1,1} T_{0,0}$  or  $T_{1,0} T_{0,1} = T_{1,1} T_{0,0}$ .

In case (ii), the MC is in fact a product measure with marginal  $(\rho_0, \rho_1)$ , and

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{T_{0,0}T_{1,1}-T_{0,1}T_{1,0}}{T_{0,0}+T_{1,1}-T_{0,1}-T_{1,0}} & \text{if } T_{0,0} + T_{1,1} \neq T_{0,1} + T_{1,0}, \\ \frac{T_{1,1}}{1+T_{1,1}-T_{0,1}} & \text{if } T_{0,0} + T_{1,1} = T_{0,1} + T_{1,0} \end{cases}$$

(the same condition is given in Marcovici & Mairesse, Theorem 3.2 in [MM14b]; see also this paper for more general condition, for different lattices, and for  $\kappa > 1$ ).

In case (i),  $M$  satisfies  $T_{0,1}T_{1,0}M_{1,0}M_{0,1} = T_{0,0}T_{1,1}M_{0,0}M_{1,1}$  and  $M_{0,0}T_{0,0} = M_{1,1}T_{1,1}$ , and can be computed explicitly.

A PCA  $A = (\mathbb{Z}, E_1, N, T) \in \text{PCA}(\mathbb{Z}, E_1)$  (without assuming the positive rate condition) admits the law of a MC on  $\mathcal{H}$  as invariant measure iff  $T_{0,0} = 1$  or  $T_{1,1} = 1$ , or any of (i) or (ii) holds. This fact as well as that concerning the positive rate condition stated above can be shown using Proposition 1.2.7. This proposition provides a finite system of algebraic equations that  $T$  has to satisfy, and this system can be solved by computing a Gröbner basis, which can be done explicitly using a computer algebra system like *sage* or *singular*.

Without the positive rate condition some pathological cases arise. Consider for example, the cases  $(T_{1,0}, T_{0,1}) = (1, 1)$  (case (a)) or  $(T_{0,1}, T_{1,0}) = (1, 1)$  (case (b)) or  $(T_{0,0}, T_{1,1}) = (1, 1)$  (case (c)). In these cases some periodicity may occur if one starts from some special configurations. Let  $C_i$  be the constant sequence (indexed by  $\mathbb{Z}$ ) equals to  $i$ , and  $C_{0,1}$  the sequence  $\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, n \in \mathbb{Z}\right)$  and  $C_{1,0}$ , the sequence  $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right)$ . It is easy to check that in case (a),  $(\delta_{C_{0,1}} + \delta_{C_{1,0}})/2$  is an invariant measure, in case (b),  $p\delta_{C_{0,1}} + (1-p)\delta_{C_{1,0}}$  is invariant for any  $p \in [0, 1]$ , in case (c),  $(\delta_{C_1} + \delta_{C_0})/2$  is invariant. Each of these invariant measures are Markov ones with some ad hoc initial distribution. Case (a) is given in Chassaing & Mairesse [CM11] as an example of non ergodic PCA with a unique invariant measure (they add the conditions  $T_{0,0} = T_{1,1} = 1/2$ ).

On the periodic line  $\text{HZ}(n)$ : (This is borrowed from Proposition 4.6 in Bousquet-Mélou [BM98]). Let  $A = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_1, N, T)$  be a PCA in  $\text{PCA}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_1)^*$ . In this case,  $A$  seen as acting on  $\text{HZ}(n)$  admits a unique invariant distribution, and this distribution is that of a HZMC iff

$$T_{0,0}T_{1,1}T_{1,0}T_{0,1} = T_{1,1}T_{0,0}T_{0,1}T_{1,0}. \quad (1.8)$$

According to Lemma 4.4 in [BM98], this condition can be extended to PCA for which  $T$ , seen as acting on  $E_1^{\text{HZ}(n)}$ , is irreducible and aperiodic. The general case, that is,

without assuming the positive rate condition, can be solved using Theorem 1.2.6. The set of solutions contains all TM solutions to (1.8), TM satisfying  $T_{0,0} = 1$  or  $T_{1,1} = 1$ , and some additional cases that depend on the size of the cylinder.

**On HZ:** Condition (1.8) is necessary and sufficient too (Theorem 1.2.2) for positive rate automata. This result is also a simple consequence of Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, Section 16].

The other family of results are also related to this last zigzag case but are much more general. This is the object of the following section, valid for  $\kappa \geq 1$ .

### Markovianity on the horizontal zigzag. Known results

Assume that a PCA  $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  seen as acting on HZ admits as invariant distribution the law of a  $(D, U)$ -HZMC. Since  $\text{HZ}_t$  is made of  $H_t$  and  $H_{t+1}$ , the law of  $S_{t+1}$  knowing  $S_t$  that can be computed using (1.5), relates also directly  $(D, U)$  with  $T$ . From (1.5) we check that in the positive rate case

$$T_{a,b} = \frac{\rho_a D_{a,c} U_{c,b}}{\rho_a (DU)_{a,b}} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}, \quad (1.9)$$

where  $\rho$  is the invariant distribution of the  $DU$ -MC (solution to  $\rho = \rho DU$ ). Since the law of the  $(D, U)$ -HZMC is invariant by  $T$ , and since the MK of  $S_t$  and  $S_{t+1}$  are respectively  $DU$  and  $UD$ , we must also have in the positive rate case,

$$DU = UD. \quad (1.10)$$

Indeed the law of  $S_t$  and  $S_{t+1}$  must be equal since they are both first line of some horizontal zigzags.

*Remark 1.1.1.* Notice that when the positive rate condition does not hold, it may happen that the PCA can be trapped in some subsets of  $E_\kappa^\mathbb{Z}$ , and can admit a Markovian invariant distribution without satisfying (1.9) for some  $(D, U)$  and all  $(a, b, c)$ .

From Lemma 16.2 in Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90], we can deduce easily the following proposition:

**Proposition 1.1.2.** *In the positive rate case, the law of  $(D, U)$ -HZMC is invariant under  $T$  iff both conditions (1.9) and (1.10) holds.*

This Proposition has a counterpart for positive rate PCA defined on more general lattices as  $\mathbb{Z}^d$ , with more general neighbourhood, where what are considered are the

cases where a Gibbs measure defined on a pair of two (time) consecutive configurations is invariant. The analogous of (1.9) in this setting connects the transition matrix with the potential of the Gibbs measure, the role played by  $DU = UD$  is replaced by the quasi-reversibility of the global MC  $S_0, S_1, \dots$  under an invariant distribution. Reversibility implies that only symmetric Gibbs measure appears (for a certain notion of symmetry). We send the interested reader to Vasilyev [Vas78], Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, section 18], Dai Pra & al. [DPLR02], PhD thesis of Louis [Lou02] (see also Marcovici [Mar13, section 1.4]) for additional details.

These notions of reversibility and quasi-reversibility when the ambient space is  $\mathbb{Z}$  are crucial here, since PCA having this property (for some initial distributions) correspond to those for which our main Theorems 1.2.1 and 1.2.2 apply. We discuss this longer in Section 1.2.2.

## Content

Some elementary facts about MC often used in the paper are recalled in Section 1.2.1. Section 1.2.2 contains Theorem 1.2.2 which gives the full characterisation of PCA with positive rate (and beyond) having a Markov distribution as invariant measure on  $\text{HZ}$ . It is one of the main contributions of the paper. This goes further than Proposition 1.1.2 (or Theorem 1.2.1) since the condition given in Theorem 1.2.2 is given in terms of the transition matrix only. This condition is reminiscent of the conditions obtained in mathematical physics to obtain an integrable system, conditions that are in general algebraic relations on the set of parameters. Theorem 1.2.4 extends the results of Theorem 1.2.2 to a class of PCA having some non positive rate TM.

Section 1.2.3 contains Theorem 1.2.6 which gives the full characterisation of PCA with positive rate having a Markov distribution as invariant measure on  $\text{HZ}(n)$ .

The rest of Section 1.2 is devoted to the conditions on  $T$  under which Markov distribution are invariant measure on  $\text{H}$  and  $\text{H}(n)$ . Unfortunately the condition we found are stated under some (finite) system of equations relating the TM  $T$  of a PCA and the MK of the Markov distributions. Nevertheless this systematic approach sheds some lights on the structure of the difficulties: they are difficult problems of algebra! Indeed the case that can be treated completely, for example the case where the invariant distribution is a product measure and the TM  $T$  symmetric (that is for any  $a, b, c$ ,  $T_{a,b}^c = T_{b,a}^c$ ) need some algebra not available in the general case. The present work leads to the idea that full characterisations of the TM  $T$  having Markov distribution as invariant measure on  $\text{H}$  and  $\text{H}(n)$  involve some combinatorics (of the set  $\{(a, b, c) : T_{a,b}^c = 0\}$ ) together with some linear algebra considerations as those appearing in Proposition 1.2.7 and in its proof, and in Section 1.2.4.

In Section 1.3 we discuss the different conclusions we can draw from the Markovianity of an invariant distribution of a PCA with TM  $T$  on one of the structure  $H$ ,  $H(n)$ ,  $HZ$  and  $HZ(n)$ , on the other structures (which is summed up in Figure 1.2). Apart the fact that this property on  $HZ$  implies that on  $H$  (and  $HZ(n)$  implies that on  $H(n)$ ) all the other implications are false.

Last, Section 1.4 is devoted to the proof of Theorems 1.2.2, 1.2.4 and 1.2.6.

## 1.2 Algebraic criteria for Markovianity

### 1.2.1 Markov chains: classical facts and notation

We now recall two classical results of probability theory for sake of completeness.

**Proposition 1.2.1.** *[Perron-Frobenius] Let  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$  be an  $n \times n$  matrix with positive entries and  $\Lambda = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$  be the multiset of its eigenvalues. Set  $m = \max |\lambda_i| > 0$  the maximum of the modulus of the eigenvalues of  $A$ . The positive real number  $m$  is a simple eigenvalue for  $A$  called the Perron eigenvalue of  $A$ ; all other eigenvalues  $\lambda \in \Lambda \setminus \{m\}$  satisfy  $|\lambda| < m$ . The eigenspace associated to  $m$  has dimension 1, and the associated left (resp. right) eigenvectors  $L = [\ell_i]_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $R = {}^t[r_i]_{1 \leq i \leq n}$ ) can be normalised such that its entries are positive. We have  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k / m^k = RL$  for  $(L, R)$  moreover normalised so that  $LR = 1$ . We will call Perron-LE (resp Perron-RE) these vectors  $L$  and  $R$ . We will call them stochastic Perron-LE (or RE) when they are normalised to be probability distributions. We will denote by  $\text{ME}(A)$  the maximum eigenvalue of the matrix  $A$ , and call it the Perron eigenvalue.*

One can extend this theorem to matrices  $A$  for which there exists  $k \geq 1$  such that all coefficients of  $A^k$  are positive. These matrices are called *primitive* in the literature.

**Proposition 1.2.2.** *Let  $P$  be a MK on  $E_\kappa$ , for some  $\kappa \geq 1$  with a unique invariant measure  $\pi$ ; this invariant measure can be expressed in terms of the coefficients of  $P$  as follows:*

$$\pi_y = \frac{\det((I_{\kappa+1} - P)^{\{y\}})}{\sum_x \det((I_{\kappa+1} - P)^{\{x\}})}$$

where  $P^{\{y\}}$  stands for  $P$  where the  $y$ th column and row are removed and where  $I_{\kappa+1}$  is the identity matrix of size  $\kappa + 1$ .

### 1.2.2 Markovianity of an invariant distribution on HZ: complete solution

Here is a slight generalisation of Proposition 1.1.2. It gives a condition for the law of a  $(D, U)$ -HZMC to be invariant by  $T$  in terms of the 3-tuple  $(D, U, T)$ .

**Theorem 1.2.1.** *Let  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  be a PCA seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\mathbb{H}\mathbb{Z}})$  and  $(D, U)$  a pair of MK such that for any  $0 \leq a, b \leq \kappa$ ,  $(DU)_{a,b} > 0$ . The law of the  $(D, U)$ -HZMC is invariant by  $A$  iff the two following conditions are satisfied:*

$$\text{Cond 1: } \begin{cases} \text{if } T_{a,c}^{a,b} > 0 & \text{then } T_{a,c}^{a,b} = \frac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}, \\ \text{if } T_{a,c}^{a,b} = 0 & \text{then } T_{a,c}^{a,b} = D_{a,c}U_{c,b} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Cond 2: } DU = UD.$$

Lemma 16.2 in Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90] asserts that if two MK  $D$  and  $U$  (with positive coefficients) satisfy  $DU = UD$ , then the  $DU$ -HMC is stable by the TM  $T$  defined by  $T_{a,b} = D_{a,c}U_{c,b}/(DU)_{a,b}$ . These authors do not consider HZMC but only MC. Vasilyev [Vas78] considers a similar question, expressed in terms of Gibbs measure (see discussion in Section 1.2.2).

*Remark 1.2.3.* If  $T$  is a positive rate TM then if the law of a HZMC with MK  $M = DU$  is invariant by  $T$  then  $M_{a,b} > 0$  for any  $0 \leq a, b \leq \kappa$  since any finite configuration has a positive probability to occur at time 1 whatever is the configuration at time 0. If a product measure  $\rho^{\mathbb{Z}}$  is invariant then  $\rho_a > 0$  for any  $0 \leq a \leq \kappa$ .

*Remark 1.2.4.* • Under **Cond 1**, if for some  $a, b, c$  we have  $T_{a,c}^{a,b} = 0$  then either all the  $T_{a,b'}^{a,b} = 0$  for  $b' \in E_\kappa$  or all the  $T_{a',b}^{a,b} = 0$  for  $a' \in E_\kappa$ .

• Notice that we do not assume the positive rate condition but something weaker  $(DU)_{a,b} > 0$ ; under this condition, the  $DU$ -MC admits a unique invariant distribution.

Without the condition  $(DU)_{a,b} > 0$ , for any  $a, b$ , some problems arise. Assume the law of a  $(D, U)$ -HZMC is invariant under  $T$  but  $(DU)_{a,b} = 0$ . Under the invariant distribution, the event  $\{S(i, t) = a, S(i + 1, t) = b\}$  does not occur a.s., and then the transitions  $(T_{a,b}^{a,b}, c \in E_\kappa)$  do not matter. For this reason, they do not need to satisfy

**Cond 1.** In other words the condition  $(DU)_{a,b} > 0$  implies that each transition  $T_{a,b}^{a,b}$  will play a role (for some  $x$ ). Without this condition “pathological cases” for the behaviour of PCA are possible as discussed in Section 1.1.3. For example if  $T_{a,a}^{a,b} = 1$  the constant process  $a$  is invariant. Hence sufficient conditions for Markovianity can be expressed on only one single value  $T_{a,b}^{a,b}$  and only few values of  $D$  and  $U$  (if  $T_{1,1}^{a,b} = 1$ ,  $D_{1,1} = U_{1,1} = 1$ , the additional conditions  $DU = UD$  and  $D_{a,c}U_{c,b}/(DU)_{a,b} = T_{a,b}^{a,b}$  for  $(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$  are not needed). Further, designing necessary and sufficient



conditions for general PCA is rather intricate since a PCA on  $E_\kappa$  can be trapped on a subset of  $E_\kappa^\mathbb{Z}$ , subset which may depend on the initial configuration. Stating a necessary and sufficient condition for a PCA to possess the law of a MC as invariant distribution, is equivalent to stating a necessary and sufficient condition for the existence of “one trap” with this property. When  $\kappa$  grows, the combinatorics of the set of traps becomes more and more involved.

*Proof of Theorem 1.2.1.* Assume first that  $S_0$  is a  $(D, U)$ -HZMC, whose distribution is invariant by  $A$ . Using the argument developed in Section 1.1.3 we check that  $T_{a,b}^c = \frac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$  (again when  $(DU)_{a,b} > 0$ , the invariant law of the  $DU$ -MC has full support) and that  $DU = UD$ .

Assume now that **Cond 1** and **Cond 2** hold for  $D$  and  $U$  (with  $(DU)_{a,b} > 0$ , for any  $a, b$ ). Let us show that the law of the  $(D, U)$ -HZMC is invariant by  $A$ . For this start from the  $(D, U)$ -HZMC on  $\text{HZ}_0$ , meaning that for any  $a_i, b_i \in E_\kappa$ ,

$$P(S(i, 0) = a_i, i = 0, \dots, n+1, S(i, 1) = b_i, i = 0, \dots, n) = \rho_{a_0} \prod_{i=0}^n D_{a_i, b_i} U_{b_i, a_{i+1}},$$

and let us compute the induced distribution on  $\text{HZ}_1$ . Assume that the configuration on  $\text{HZ}_1$  is obtained by a transition of the automata from  $\text{HZ}_0$

$$\begin{aligned} & P \left( \begin{array}{l} S(i, 1) = b_i, i = 0, \dots, n, \\ S(i, 2) = c_i, i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right) \\ &= \sum_{(a_i, 0 \leq i \leq n+1)} \rho_{a_0} \left( \prod_{i=0}^n D_{a_i, b_i} U_{b_i, a_{i+1}} \right) \left( \prod_{i=0}^{n-1} T_{b_i, b_{i+1}}^{c_i} \right) \\ &= \left( \sum_{a_0} \rho_{a_0} D_{a_0, b_0} \right) \left( \prod_{i=0}^{n-1} \sum_x (U_{b_i, x} D_{x, b_{i+1}}) \right) \left( \sum_x U_{b_n, x} \right) \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{D_{b_i, c_i} U_{c_i, b_{i+1}}}{(DU)_{b_i, b_{i+1}}} \right) \end{aligned}$$

The first parenthesis equals  $\rho_{b_0}$ , the second  $\prod_{i=0}^{n-1} (UD)_{b_i, b_{i+1}}$ , the third 1, and the denominator of the fourth simplify when multiplied by the second since  $DU = UD$ . This gives the desired result.  $\square$

We now define some quantities needed to state Theorem 1.2.2.

Let  $\nu := \nu[T]$  be the stochastic Perron-LE of the stochastic matrix

$$Y := Y[T] = \left[ T_{i,j} \right]_{0 \leq i, j \leq \kappa}$$

and  $\gamma := \gamma[T]$  be the stochastic Perron-LE of the matrix

$$X := X[T] = \left[ \begin{array}{c} T_{0,a} \nu_a \\ T_{a,d} \\ 0 \end{array} \right]_{0 \leq d, a \leq \kappa}$$

associated with  $\lambda := \lambda[T] > 0$  the Perron-eigenvalue of  $X$  (this matrix is defined in the positive rate case). Then  $(\gamma_i, 0 \leq i \leq \kappa)$  is solution to:

$$\sum_d \frac{\gamma_d}{T_{a,d}} = \lambda \frac{\gamma_a}{T_{a,a} \nu_a}. \quad (1.11)$$

By Proposition 1.2.2,  $\nu$  and  $\gamma$  can be computed in terms of  $T$  (but difficulties can of course arise for effective computation starting from that of  $\lambda$ ). Define further for any  $\eta = (\eta_a, 0 \leq a \leq \kappa) \in \mathcal{M}^*(E_\kappa)$  (law on  $E_\kappa$  with full support), the MK  $D^\eta$  and  $U^\eta$ :

$$D_{a,c}^\eta = \frac{\sum_\ell \frac{\eta_\ell}{T_{a,\ell}} T_{c,\ell}}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{a,b'}}}, \quad U_{c,b}^\eta = \frac{\frac{\eta_b}{T_{0,b}} T_{0,b}}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{0,b'}} T_{0,b'}}, \quad \text{for } 0 \leq a, b, c \leq \kappa. \quad (1.12)$$

The indices are chosen to make easier some computations in the paper. In absence of specification the sums are taken on  $E_\kappa$ .

**Theorem 1.2.2.** *Let  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T) \in \text{PCA}(\mathbb{Z}, E_\kappa)^*$  be a positive rate PCA seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\text{HZ}})$ . The PCA  $A$  admits the law of a HZMC as invariant distribution on HZ iff  $T$  satisfies the two following conditions:*

**Cond 3:** for any  $0 \leq a, b, c \leq \kappa$ ,  $T_{a,b} = \frac{T_{0,0} T_{a,b} T_{a,0} T_{0,b}}{T_{a,0} T_{0,b} T_{0,0}}$ ,

**Cond 4:** the equality  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$  holds (for  $\gamma$  defined in (1.11), and  $D^\gamma$  and  $U^\gamma$  defined in (1.12)).

In this case the  $(D^\gamma, U^\gamma)$ -HZMC is invariant under  $A$  and the common invariant distribution for the MC with MK  $D^\gamma, U^\gamma, D^\gamma U^\gamma$  or  $U^\gamma D^\gamma$  is  $\rho = [\gamma_i \mu_i]_{0 \leq i \leq \kappa}$  where  $\mu = {}^t[\mu_i]_{0 \leq i \leq \kappa}$  is the Perron-RE of  $X$  normalised so that  $\rho$  is a probability distribution.

When  $\kappa = 1$  (the two-colour case), when **Cond 3** holds, then so does **Cond 4**, and then the only condition is **Cond 3** (which is equivalent to (1.8)).

Even if **Cond 4** seems much similar to **Cond 2**, it is not! In Theorem 1.2.1 the question concerns the existence or not of a pair  $(D, U)$  satisfying some conditions. In Theorem 1.2.2 the only possible pair  $(D, U)$  is identified, it is  $(D^\gamma, U^\gamma)$ , and the question reduces to know if the equality  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$  holds or not.

The proof of this theorem is postponed to Section 1.4, as well as the fact that for  $\kappa = 1$ , **Cond** 4 disappears whilst this fact is far to be clear at the first glance. An important ingredient in the proof is Lemma 1.4.1 which says that for a given  $T$ , **Cond** 3 is equivalent to the existence of a pair of MK  $(D, U)$  such that **Cond** 1 holds.

By (1.11), **Cond** 4 can be rewritten

$$\sum_c \frac{\frac{T_{c,c} \nu_c}{T_{0,c}} T_{0,c}^a}{\left( \sum_{b'} \frac{\gamma_{b'}}{T_{0,b'}} T_{0,b'}^a \right)} \left( \sum_d \frac{\gamma_d}{T_{c,d}} T_{c,d}^b \right) = \frac{T_{0,a} \nu_a}{\gamma_a} \frac{\gamma_b}{T_{a,b}^0}, \quad \text{for any } 0 \leq a, b \leq \kappa. \quad (1.13)$$

*Remark 1.2.5.* Condition **Cond** 3 is bit asymmetric. In Lemma 1.4.1 we will show that this condition is equivalent in the positive rate case to the following symmetric condition:

$$\textbf{Cond 5: for any } 0 \leq a, a', b, b', c, c' \leq \kappa, \\ T_{a',b'}^c T_{a,b}^c T_{a',b}^c = T_{a,b}^c T_{a',b'}^c T_{a',b}^c.$$

The following Section, whose title is explicit, discuss some links between our results and the literature.

## Reversibility, quasi-reversibility and Theorems 1.2.1 and 1.2.2

Here is a simple corollary of Theorem 1.2.1.

**Corollary 1.2.3.** *Let  $A$  be a positive rate PCA with TM  $T$  and  $(D, U)$  a pair of MK. If  $(D, U, T)$  satisfies **Cond** 1 and **Cond** 2, then so does  $(U, D, T')$ , for  $T'_{a,b} = \frac{U_{a,c} D_{c,b}}{(UD)_{a,b}}$ . As a consequence both  $T$  and  $T'$  let invariant the law  $\nu$  of the MC with Markov kernel  $M = DU = UD$  (under its stationary distribution).*

As we have explained at the beginning of the paper, a PCA  $A$  with TM  $T$  allows one to define a MC  $(S_t[T], t \geq 0)$  on the set of global configurations (we write now  $S_t[T]$  instead of  $S_t$ ). Under the hypothesis of Corollary 1.2.3, we see that for any finite  $n$ , the time reversal  $(S_{n-t}[T], 0 \leq t \leq n)$  of the MC  $(S_t[T], 0 \leq t \leq n)$  starting from  $S_0[T] \sim \nu$  (as defined in Corollary 1.2.3), is a MC whose kernel is that of the PCA with TM  $T'$ , whose initial law is also  $\nu$ .

Let  $\mu$  be a distribution on  $E_\kappa^\mathbb{Z}$ . The MC  $(S_t[T], t \geq 0)$  with initial distribution  $\mu$  is reversible if the equality  $(S_0[T], S_1[T]) \stackrel{d}{=} (S_1[T], S_0[T])$  holds. It is said to be quasi-reversible (see e.g. Vasilyev [Vas78]) if the two following properties hold:

(a)  $S_1[T] \sim \mu$ ,

(b) there exists a certain PCA  $A'$  with TM  $T'$  for which the distribution  $\mathcal{L}(S_0[T] \mid S_1[T])$  (time reversal) coincides with  $\mathcal{L}(S_1[T'] \mid S_0[T'])$  (usual time).

Clearly, reversibility implies quasi-reversibility. Moreover, the present notion of reversibility is the same as the usual one for MC. Quasi-reversibility implies that the time reversal of the MC  $(S_t[T], 0 \leq t \leq n)$  (for some finite  $n$ ) where  $S_0[T] \sim \mu$ , is a MC whose kernel is that of a PCA  $A'$  with some TM  $T'$ . It is then more restrictive that the only fact that the time-reversal of  $S_t[T]$  is a MC.

Theorem 3.1 in Vasilyev [Vas78] holds for PCA built on more general graphs and neighborhoods. He states that quasi-reversibility for the MC  $(S_t[T], t \geq 0)$  with initial distribution  $\mu$  is equivalent to the fact that the distribution of  $(S_0[T], S_1[T])$  is a Gibbs measure on a graph  $\bar{\Gamma}$  built using two copies of the graph  $\Gamma$  on which is defined the PCA. For PCA built on  $\mathbb{Z}$ , the corresponding graph  $\bar{\Gamma}$  is simply HZ. Vasilyev [Vas78, Cor. 3.2 and Cor.3.7] characterizes the positive rate TM  $T$  that induces a reversible MC (under some invariant distribution), and those quasi-reversible for general  $\bar{\Gamma}$ . For the cases studied in the present paper (line case, neighborhood of size 2), a change of variables allows one to check that these cases correspond exactly to the set of  $T$  which satisfy the two conditions of Theorem 1.2.1.

Hence, by Corollary 1.2.3, we can deduce that when  $(D, U, T)$  satisfies Theorem 1.2.1, then the MC  $(S_t[T], t \geq 0)$  with initial distribution  $\nu$  is quasi-reversible. By Corollary 3.7 in [Vas78], one sees that every quasi-reversible MC  $(S_t[T], t \geq 0)$  with initial distribution  $\mu$  satisfies the hypothesis of Theorem 1.2.1 for some  $(D, U, T)$ . Hence, the invariant distribution  $\nu$  is the law of a MC on the line (deduction already made in Vasilyev [Vas78]). In fact, Vasilyev [Vas78] expresses his results in terms of Gibbs measures on HZ instead of HZMC, but with some changes of variables, one can pass from the first one to the other (see also Georgii [Geo11, Theo. 3.5] for more details on the correspondence between Gibbs measure on a line and MC).

The reversible cases treated in Corollary 3.2 in [Vas78] correspond to the cases where  $(D, U, T)$  satisfies Theorem 1.2.1, and  $D = U$ . From what is said above, Theorem 1.2.2 applies then to the quasi-reversible case exactly.

### Relaxation of the positive rate condition

We will not consider all PCA that admit some Markov invariant distribution on HZ here, but only those for which the invariant distribution is the law of a HZMC of MK  $(D, U)$  satisfying, for any  $a, b \in E_\kappa$ ,  $(DU)_{a,b} > 0$  (this is one of the hypothesis of Theorem 1.2.1). We will assume that for  $i = 0$ , for any  $a, b, c$ ,  $T_{a,b}^i > 0$  and  $T_{i,i}^c > 0$  (one can always relabel the elements of  $E_\kappa$  if the condition holds for a  $i \neq 0$  instead).

**Cond 6:** for any  $a, b, c \in E_\kappa$ ,  $T_{a,b}^0 > 0$ ,  $T_{0,0}^c > 0$ .

Under **Cond 6**, **Cond 3** is well defined. For any pair  $(a, b)$ , since  $\sum_c T_{a,b}^c = 1$ ,

there is a  $c$  such that  $T_{a,b} > 0$ ; hence **Cond 3** implies that  $T_{a,b} > 0$  for any  $a, b$ . It follows that  $U_{c,b}^\gamma$  and  $D_{a,c}^\gamma$  as defined in (1.12) are still well defined and  $(D^\gamma U^\gamma)_{a,b} > 0$  for all  $a, b$ . We have the following result

**Theorem 1.2.4.** *Theorem 1.2.2 holds if instead of considering  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  in  $\text{PCA}(\mathbb{Z}, E_\kappa)^*$ ,  $T$  satisfies **Cond 6** instead, with the slight modification that  $U_{c,b}^\gamma = 0$  when  $\{T_{a,b}, a \in E_\kappa\} = \{0\}$ .*

The proof is postponed to the end of Section 1.4. It is similar to that of Theorem 1.2.2.

### 1.2.3 Markovianity of an invariant distribution on $\text{HZ}(n)$ : complete solution

In the cyclic zigzag, we have

**Theorem 1.2.5.** *Let  $A := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  be a PCA seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\text{HZ}(n)})$  for some  $n \geq 1$  and  $(D, U)$  a pair of MK such that for any  $0 \leq a, b \leq \kappa$ ,  $(DU)_{a,b} > 0$ . The law of a  $(D, U)$ -HZCMC on  $\text{HZ}(n)$  is invariant by  $A$  iff **Cond 1** holds and **Cond 7**:  $\text{Diagonal}((DU)^k) = \text{Diagonal}((UD)^k)$  for all  $1 \leq k \leq \min(\kappa + 1, n)$ .*

Notice that **Cond 7** is equivalent to the fact that for all  $j \leq |E_\kappa|$ , for all  $a_0, \dots, a_{j-1} \in E_\kappa$ ,

$$\prod_{i=0}^{j-1} (DU)_{a_i, a_{i+1} \bmod j} = \prod_{i=0}^{j-1} (UD)_{a_i, a_{i+1} \bmod j}.$$

It does not imply  $DU = UD$  (but the converse holds).

*Proof.* Suppose that the law of the  $(D, U)$ -HZCMC on  $\text{HZ}(n)$  is invariant by  $T$ . The reason why **Cond 1** holds is almost the same as in Section 1.1.3:

$$P(S(0, 1) = c | S(0, 0) = a, S(1, 0) = b) = \frac{D_{a,c} U_{c,b} ((DU)^{n-1})_{b,a}}{(DU)_{a,b} ((DU)^{n-1})_{b,a}} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}.$$

If  $S$  is a  $(D, U)$ -HZCMC on  $\text{HZ}(n)$  then  $S|_{\text{H}_0(n)}$  and  $S|_{\text{H}_1(n)}$  are respectively  $DU$  and  $UD$  CMC on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Moreover the laws of  $S|_{\text{H}_0(n)}$  and  $S|_{\text{H}_1(n)}$  must be equal since they are respectively first line of  $\text{HZ}_0$  and  $\text{HZ}_1$ . Now take a pattern  $w = (w_1, \dots, w_\ell)$  in  $E_\kappa^\ell$ , for some  $\ell \leq |E_\kappa|$ , and consider the word  $W$  obtained by  $j$  concatenations of  $w$ . The probability that  $S|_{\text{H}_0(j\ell)}$  and  $S|_{\text{H}_1(j\ell)}$  take value  $W$ , are both equal to

$$\frac{\left( \prod_{i=0}^{\ell-1} (DU)_{w_i, w_{i+1} \bmod \ell} \right)^j}{\text{Trace}((UD)^{\ell j})} = \frac{\left( \prod_{i=0}^{\ell-1} (UD)_{w_i, w_{i+1} \bmod \ell} \right)^j}{\text{Trace}((UD)^{\ell j})},$$

where the denominators are equal. Therefore, we deduce **Cond 7**.

Assume that **Cond 1** and **Cond 7** hold true for  $D$  and  $U$  some MK. Assume that  $S$  is a  $(D, U)$ -HZCMC on  $\text{HZ}_0$ . Again  $S|_{\text{H}_0(n)}$  and  $S|_{\text{H}_1(n)}$  are respectively  $DU$  and  $UD$ -CMC on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . By **Cond 1** one sees that  $S|_{\text{H}_1(n)}$  is obtained from  $S|_{\text{H}_0(n)}$  by the PCA  $A$ . Let us see why **Cond 7** implies that  $S|_{\text{H}_0(n)}$  and  $S|_{\text{H}_1(n)}$  have the same law: we have to prove that any word  $W = (w_0, \dots, w_{n-1})$  occurs equally likely for  $S|_{\text{H}_0(n)}$  or  $S|_{\text{H}_1(n)}$ , when **Cond 7** says that it is the case only when  $n \leq |E_\kappa|$ . We will establish that

$$\prod_{i=0}^{n-1} (UD)_{w_i, w_{i+1} \bmod n} = \prod_{i=0}^{n-1} (DU)_{w_i, w_{i+1} \bmod n}.$$

For any letter  $a \in E_\kappa$  which occurs at successive positions  $j_1^a, \dots, j_{k_a}^a$  for some  $k_a$  in  $W$  let  $d_n^a(j_i^a, j_{i+1}^a)$  be the distance between these indices in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  that is  $\min(j_{i+1}^a - j_i^a, n - j_{i+1}^a + j_i^a)$ . Since  $|E_\kappa| < +\infty$  is bounded, there exists  $a$  and indices  $j_i^a$  and  $j_{i+1}^a$  for which  $d_n(j_i^a, j_{i+1}^a) \leq |E_\kappa|$  (by the so called pigeonhole principle); to show that  $W$  occurs equally likely in  $S|_{\text{H}_1(n)}$  and in  $S|_{\text{H}_0(n)}$  it suffices to establish that  $W'$  obtained by removing the cyclic-pattern  $W' = w_{j_i^a+1}, \dots, w_{j_{i+1}^a}$  from  $W$  occurs equally likely in  $S|_{\text{H}_1(n-(j_{i+1}^a-j_i^a))}$  and  $S|_{\text{H}_0(n-(j_{i+1}^a-j_i^a))}$  (since the contribution to the weight of the cyclic-pattern  $W'$  is  $\prod_{\ell=j_i^a}^{j_{i+1}^a-1} (DU)_{w'_\ell, w'_{\ell+1}} = \prod_{\ell=j_i^a}^{j_{i+1}^a-1} (UD)_{w'_\ell, w'_{\ell+1}}$  in both  $S|_{\text{H}_1(n)}$  and  $S|_{\text{H}_0(n)}$ ). This ends the proof by induction.  $\square$

Recall the definitions of  $U^\eta, D^\eta, \gamma$  given before Theorem 1.2.2.

**Theorem 1.2.6.** *Let  $A := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  be a positive rate PCA seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\text{HZ}(n)})$ .  $A$  admits the law of a HZCMC as invariant distribution on  $\text{HZ}(n)$  iff **Cond 3** holds and if*

**Cond 8:**  $\text{Diagonal}((D^\gamma U^\gamma)^k) = \text{Diagonal}((U^\gamma D^\gamma)^k)$  for all  $1 \leq k \leq \kappa + 1$ .

*In this case the  $(D^\gamma, U^\gamma)$ -HZCMC is invariant under  $A$ . When  $\kappa = 1$  (the two-colour case), when **Cond 3** holds then so does **Cond 8**, and then the only condition is **Cond 3**.*

Again, one can state a version of this Theorem without the positive rate condition with **Cond 6** instead (the analogous of Theorem 1.2.4 in the cyclic case). The proof in this case is the same as that of Theorem 1.2.4.

#### 1.2.4 Markov invariant distribution on the line

In this section, we discuss some necessary and sufficient conditions on  $(M, T)$  for the law of the  $M$ -MC to be invariant under  $T$  on  $\text{H}$  and  $\text{H}(n)$ .

**Markovian invariant distribution on  $\mathbf{H}$  or  $\mathbf{H}(n)$** 

Let  $T$  be a TM for a PCA  $A$  in  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)$ . Let  $M$  be a MK on  $E_\kappa$ , and  $\rho = [\rho_i]_{0 \leq i \leq \kappa}$  an element of  $\mathcal{M}^*(E_\kappa)$ . Consider the matrices  $(Q_x^M, x \in E_\kappa)$  defined by

$$Q_x^M = \left[ \frac{\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_j}} M_{i,j} T_{i,j}^x \right]_{0 \leq i,j \leq \kappa},$$

and set  $\rho^{1/2} := [\sqrt{\rho_i}]_{0 \leq i \leq \kappa}$  (we should write  $Q_x^M(\rho, T)$  instead, but  $\rho$  and  $T$  will be implicit).

**Lemme 1.2.6.** *Let  $T$  be a TM for a PCA  $A$  in  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)$  (with positive rate or not).*

(i) *The law of the  $(\rho, M)$ -MC is invariant by  $T$  on  $H$  iff for any  $m > 0$ , any  $x_1, \dots, x_m \in E_\kappa$ ,*

$$\rho_{x_1} \prod_{j=1}^{m-1} M_{x_j, x_{j+1}} = \rho^{1/2} \left( \prod_{j=1}^m Q_{x_j}^M \right)^t \rho^{1/2}. \quad (1.14)$$

(ii) *The law of the  $M$ -CMC is invariant by  $T$  on  $H(n)$  iff for any  $x_1, \dots, x_n \in E_\kappa$ ,*

$$\prod_{j=1}^n M_{x_j, x_{j+1 \bmod n}} = \text{Trace} \left( \prod_{j=1}^n Q_{x_j}^M \right). \quad (1.15)$$

*Proof.* Just expand the right hand side. □

In the rest of this section, (i) and (ii) will always refer to the corresponding item in Lemma 1.2.6. We were not able to fully describe the set of solutions  $(M, T)$  to (i) and (ii). Nevertheless, in the rest of this section we discuss various necessary and sufficient conditions on  $(M, T)$ . We hope that the following results will shed some light on the algebraic difficulties that arise here.

**Proposition 1.2.7.** *[I.I. Piatetski-Shapiro] Lemma 1.2.6 still holds if in (i) the conditions (1.14) holds only for all  $m \leq \kappa + 2$ .*

*Proof.* We borrow the argument from Toom & al. [TVS<sup>+</sup>90, Theorem 16.3]. First, note that Formula (1.14) can be rewritten

$$\left( \frac{\rho^{1/2}}{\rho_{x_1}} Q_{x_1}^M - \frac{M_{x_1, x_2}}{\rho_{x_2}} \rho^{1/2} \right) (Q_{x_2}^M Q_{x_3}^M \dots Q_{x_m}^M)^t \rho^{1/2} = 0. \quad (1.16)$$

We want to prove that if (1.16) holds for all  $m \leq \kappa + 2$  (and all  $(x_i)'s$ ) then it holds also for any  $m > \kappa + 2$ . The argument relies on the dimension of a certain associated vector space. Consider  $\mathcal{P}^d$  the set of monomials  $P(Q_0^M, \dots, Q_\kappa^M)$  with degree at most  $d$ , that is an ordered product with at most  $d$  terms (with possible repetitions) of some  $Q_i^M$ 's.

If (1.16) holds for any  $m \leq \kappa + 2$  and some fixed  $x_1, x_2$ , then the row vector

$$v = \frac{\rho^{1/2}}{\rho_{x_1}} Q_{x_1}^M - \frac{M_{x_1, x_2}}{\rho_{x_2}} \rho^{1/2} \quad (1.17)$$

has the following property: for any  $d \leq \kappa + 1$  and  $P \in \mathcal{P}^d$ , we have

$$vP(Q_0^M, \dots, Q_\kappa^M) {}^t\rho^{1/2} = 0.$$

This property can be rephrased as follows: all the vectors in the set

$$S = \{vP(Q_0^M, \dots, Q_\kappa^M), P \in \mathcal{P}^d\}$$

are orthogonal to  ${}^t\rho^{1/2}$ , or equivalently,  $\text{Vect}(S)$  is orthogonal to  ${}^t\rho^{1/2}$ .

Take now any vector  $c$ , and consider the vector spaces  $L_1(c) = \text{Vect}(c)$  and for any  $m \geq 1$ ,

$$L_{m+1}(c) = \text{Vect}(L_m(c), \{xQ_y^M, x \in L_m(c), 0 \leq y \leq \kappa\}).$$

The sequence  $L_m(c)$  is strictly increasing till it becomes constant, because its dimension is bounded by that of the ambient space  $\kappa + 1$ . For this reason, it reaches its final size for some  $m \leq \kappa + 1$ . Hence, if the vector space  $L_{\kappa+1}(c)$  is orthogonal to  ${}^t\rho^{1/2}$ , then so does the  $L_m(c)$  for  $m > \kappa + 1$ .

To end the proof, it remains to note that the polynomial which appears in (1.16) has degree  $m - 1$ .  $\square$

Since the asymptotics of  $\text{Trace}(A^n)$  or  $\rho^{1/2} A^n {}^t\rho^{1/2}$  are driven by the largest eigenvalues of  $A$  (under mild conditions on  $(\rho^{1/2}, A)$ ), we have the following statement which can be used as some necessary conditions on the system  $(M, T)$ .

**Proposition 1.2.8.** (a) Assume that  $(M, T)$  is solution to (i) with  $T$  a positive rate  $TM$ , then for any  $\ell \geq 1$ , any  $x_1, \dots, x_\ell$  we have  $\prod_{i=1}^\ell M_{x_i, x_{i+1} \bmod \ell} = \text{ME}(\prod_{j=1}^\ell Q_{x_j}^M)$  (recall that  $\text{ME}(A)$  is the maximum eigenvalue of the matrix  $A$ ).

(b) Let  $\ell \geq 1$  be fixed. Assume that  $(M, T)$  is solution to (ii) for at least  $\kappa + 1$  (this is  $|E_\kappa|$ ) different positive integers  $n$  of the form  $n = k\ell$ . In this case, for any  $x_1, \dots, x_\ell$ ,  $\text{ME}(\prod_{j=1}^\ell Q_{x_j}^M) = \prod_{i=1}^\ell M_{x_i, x_{i+1} \bmod \ell}$ . Moreover, all the matrices  $\prod_{j=1}^\ell Q_{x_j}^M$  have rank 1.



*Remark 1.2.9.* In Proposition 1.2.8, we can replace the positive rate condition by a weaker one: we only need the primitivity of the matrices  $\prod_{j=1}^{\ell} Q_{x_j}^M$  for any  $\ell, x_1, \dots, x_{\ell}$ . But this condition is a bit difficult to handle since it does not follow the primitivity of the family of matrices  $Q_x^M$ .

*Proof.* We give a proof in the case  $\ell = 1$  and for case (i) and (ii) for sake of simplicity, but exactly the same argument applies for larger  $\ell$  (by repeating the pattern  $(x_1, \dots, x_{\ell})$  instead of  $x$  alone). Following Remark 1.2.3, the positive rate condition on  $T$  implies that if the law of MC with MK  $M$  is invariant by  $T$ , then the matrices  $Q_{x_1}^M \dots Q_{x_{\ell}}^M$  have positive coefficients.

(a) Let  $m \geq 1$ . Taking  $x_1 = \dots = x_m = x$  in Lemma 1.2.6, we get

$$\rho_x M_{x,x}^{m-1} = \rho^{1/2} (Q_x^M)^m \rho^{1/2}.$$

By Perron-Frobenius we obtain for  $R_{Q_x^M}$  and  $L_{Q_x^M}$  the Perron-RE and LE of  $Q_x^M$  normalised so that  $L_{Q_x^M} R_{Q_x^M} = 1$ ,

$$\rho_x M_{x,x}^{m-1} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \text{ME}(Q_x^M)^m (\rho^{1/2} R_{Q_x^M} L_{Q_x^M} \rho^{1/2}).$$

Hence, necessarily,  $\text{ME}(Q_x^M) = M_{x,x}$ .

(b) Let  $x$  be fixed. Assume that (ii) holds for  $\kappa + 1$  different integers  $n = n_i$  for  $i = 0, \dots, \kappa$ . For all  $n \in \{n_0, \dots, n_{\kappa}\}$ ,  $M_{x,x}^n = \text{Trace}((Q_x^M)^n) = \sum_i \lambda_i^n$  where  $(\lambda_i, 0 \leq i \leq \kappa)$  are the eigenvalues of  $Q_x^M$  from what we deduce that all the eigenvalues of  $Q_x^M$  equals 0, but 1 which is  $M_{x,x}$ .  $\square$

One can design various sufficient conditions for  $T$  to satisfy (i), (ii). For example, for the case (i) following the proof of Proposition 1.2.7, it suffices that for any  $x_1, x_2$ ,  $\frac{\rho^{1/2}}{\rho_{x_1}} Q_{x_1}^M = \frac{M_{x_1, x_2}}{\rho_{x_2}} \rho^{1/2}$  for the law of the  $M$ -MC to be invariant under  $T$ .

### I.i.d. case

If we search to determine the TM  $T$  for which there exists an invariant product measure (instead of more general MC), the content of Section 1.2.4 still applies since product measures are MC whose MK satisfies, for any  $(a, b) \in E_{\kappa}^2$ ,  $M_{a,b} = \rho_b$ . In this case

$$Q_x^M = Q_x^{\rho} = \left[ \sqrt{\rho_i} T_{i,j} \sqrt{\rho_j} \right]_{0 \leq i, j \leq \kappa}.$$

The iid case is also interesting, as has been shown by Mairesse & Marcovici [MM14b]. We can design some additional sufficient conditions for the product measure  $\rho^{\mathbb{Z}}$  to be invariant under  $T$ . For example if

$$\frac{\rho^{1/2}}{\rho_x} Q_x^{\rho} = \rho^{1/2}, \quad \text{for any } x \in E_{\kappa} \quad (1.18)$$

(see also Mairesse & Marcovici [MM14b, Theorem 5.6]), or if for any words  $W_1$  and  $W_2$ , and any  $0 \leq x, y \leq \kappa$ ,  $Q_{W_1}^\rho(Q_x^\rho Q_y^\rho - Q_y^\rho Q_x^\rho)Q_{W_2}^\rho = 0$  then  $\rho^\mathbb{Z}$  is invariant under  $T$ . Necessary and sufficient conditions on  $T$  seem out of reach for the moment.

### Symmetric transition matrices and i.i.d. invariant measure

We say that a TM  $T$  is symmetric if for any  $a, b, c \leq \kappa$ ,  $T_{a,b} = T_{b,a}$ . Let  $T$  be a symmetric transition matrix of a PCA  $A$  in  $\text{PCA}(\mathbb{L}, E_\kappa)^*$  with positive rate and let  $\rho \in \mathcal{M}^*(E_\kappa)$  be a distribution on  $E_\kappa$  with full support. A distribution  $\mu$  in  $\mathcal{M}(E_\kappa^\mathbb{Z})$  is said to be symmetric if  $\mu(x_1, \dots, x_n) = \mu(x_n, \dots, x_1)$  for any  $n \geq 1, 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \kappa$ . We start by two simple observations valid for PCA with a symmetric TM:

- by a compactness argument (easily adapted from Prop. 2.5 p.25 in [TVS<sup>+</sup>90]), there exists a symmetric distribution  $\mu$  in  $\mathcal{M}(E_\kappa^\mathbb{Z})$  invariant by  $T$ .
- for any  $x$  the matrix  $Q_x^\rho$  is symmetric and then Hermitian. Hermitian matrices possess some important properties, which help to go further:

- $r$  is a right eigenvector for an Hermitian matrix  $A$  associated with the eigenvalue  $\lambda$  (that is  $rA = \lambda A$ ) iff  ${}^t r$  is a right eigenvector of  $A$  associated with  $\lambda$  (that is  $A{}^t r = \lambda {}^t r$ ).
- If  $A$  and  $B$  are two Hermitian matrices then  $\text{ME}(A + B) \leq \text{ME}(A) + \text{ME}(B)$ . The equality holds only if the (left, and then right by (a)) eigenspaces of the matrices  $A$  and  $B$  associated with the respective eigenvalues  $\text{ME}(A)$  and  $\text{ME}(B)$  are equal.

**Proposition 1.2.10.** *Let  $T$  be a symmetric TM with positive rate.*

- $\rho^\mathbb{Z}$  is invariant by  $T$  on  $H$  iff (1.18) holds.
- $\rho^{\mathbb{Z}(n)}$  is invariant by  $T$  on  $H(n)$  for at least  $\kappa + 1$  different positive integers  $n$  iff for any  $i, j, x \in E_\kappa$ ,  $T_{i,j} = \rho_x$ .

The positive rate condition allows one to use Perron-Frobenius theorem on the matrices  $(Q_x^\rho, x \in E_\kappa)$  in the case where the Perron-eigenspaces have dimension 1. The proposition still holds if we replace the positive rate condition by a weaker one for example the primitivity of the matrices  $(Q_x^\rho, x \in E_\kappa)$ .

*Proof.* (a) Assume first that  $\rho^\mathbb{Z}$  is invariant by  $T$  on  $H$ . Then, we have, for any  $n \geq 1$ , the equality  $\rho^{1/2} (Q_x^\rho)^n {}^t \rho^{1/2} = \rho_x^n$ . By Frobenius, we deduce that  $\text{ME}(Q_x^\rho) = \rho_x$ . Hence,  $\text{ME}(\sum_x Q_x^\rho) = \sum_x \text{ME}(Q_x^\rho) = 1$  (by the properties of Hermitian matrices recalled above), all the matrices  $Q_x^\rho$  and  $\sum_x Q_x^\rho$  have same Perron-LE and RE that are  $\rho^{1/2}$  and  ${}^t \rho^{1/2}$ .

Reciprocally, assume that for all  $x \in E_\kappa$ , the Perron eigenvalue of  $Q_x^\rho$  is  $\rho_x$  and  $\rho^{1/2}$  and  ${}^t\rho^{1/2}$  are Perron-LE and RE of  $Q_x^\rho$ . Then for any  $m$  for any  $x_1, \dots, x_m \in E_\kappa$ ,

$$\rho^{1/2} \left( \prod_{j=1}^m Q_{x_j}^\rho \right) {}^t\rho^{1/2} = \rho_{x_1} \rho^{1/2} \left( \prod_{j=2}^m Q_{x_j}^\rho \right) {}^t\rho^{1/2} = \dots = \prod_{j=1}^m \rho_{x_j} \rho^{1/2} {}^t\rho^{1/2} = \prod_{j=1}^m \rho_{x_j}$$

which means that  $\rho^\mathbb{Z}$  is invariant by  $T$ .

Proof of (b). By the same argument as in (a),  $Q_x^\rho$  and  $\sum_x Q_x^\rho$  have  $\rho^{1/2}$  and  ${}^t\rho^{1/2}$  for Perron-LE and RE. Moreover since the rank of  $Q_x^\rho$  is 1 (see Proposition 1.2.8),

$$Q_x^\rho = \text{ME}(Q_x^\rho) R_{Q_x^\rho} L_{Q_x^\rho} = \rho_x {}^t\rho^{1/2} \rho^{1/2} = \left[ {}^t\rho_i^{1/2} \rho_x \rho_j^{1/2} \right]_{i,j}.$$

But,  $(Q_x^\rho)_{i,j} = {}^t\rho_i^{1/2} T_{i,j} \rho_j^{1/2}$ . Then, for all  $x, i, j$ ,  $T_{i,j} = \rho_x$ . (The converse is trivial)  $\square$

### 1.3 Markov invariant distribution on $\mathbf{H}$ vs $\mathbf{H}(n)$ vs $\mathbf{HZ}$ vs $\mathbf{HZ}(n)$

Consider a TM  $T$  seen as acting on  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}(n)$ ,  $\mathbf{HZ}$  and  $\mathbf{HZ}(n)$ . In this section we discuss the different conclusions we can draw from the Markovianity of the invariant distribution under  $T$  on one of these structures. Before going into the details, we think that it is interesting to note that any Markov measure on  $\mathbf{H}$  is the invariant measure for a PCA (as stated Prop. 16.1 in [TVS<sup>+</sup>90]).

Figure 1.2 gathers most of the results obtained in this section.

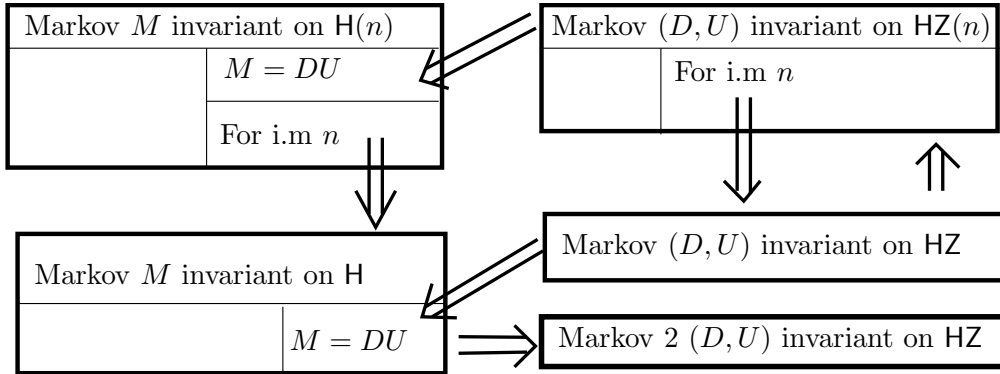


Figure 1.2 – Relations between the existence of Markovian invariant distribution on the different structures. “i.m.” means “infinitely many”

**From  $H(n)$  to  $H$ .** The following Proposition is already known (see Albenque [Alb09] and a “formal” version is also used in Bousquet-Mélou [BM98]).

**Proposition 1.3.1.** *If a PCA  $A := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  admits the law of a CMC with an irreducible MK  $M$  on  $H(n)$  as an invariant distribution for infinitely many  $n$  then the PCA  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  admits the law of the  $M$ -MC as an invariant distribution on  $H$ .*

*Proof.* Several proofs are possible. We adapt slightly the argument of Theorem 3 in [Alb09]. The idea is to prove that the law of a  $M$ -CMC on  $H(n)$  converges to a  $M$ -MC on the line (limit taken in the set  $O$ , the set of integers  $n$  for which the law of the  $M$ -MC is invariant by  $T$  on  $H(n)$ ). Proceed as follows. Choose some  $k \geq 1$ . For  $n \geq k$  in  $O$ , the probability of any pattern  $b_1, \dots, b_k$  in  $E_\kappa$  (in successive positions) is for this distribution

$$\left( \prod_{i=1}^{k-1} M_{b_i, b_{i+1}} \right) (M^{n-k})_{b_k, b_1} = \sum_{(a_1, \dots, a_{k+1}) \in E_\kappa^{k+1}} \left( \prod_{i=1}^k M_{a_i, a_{i+1}} T_{b_i}^{a_i, a_{i+1}} \right) (M^{n-k-1})_{a_{k+1}, a_1}. \quad (1.19)$$

Since  $M$  is an irreducible and aperiodic MK, by Perron-Frobenius theorem,  $M^n \rightarrow M^\infty$  where  $M^\infty$  is the matrix whose rows equal the stochastic LE  $\rho$  of  $M$ . Therefore  $(M^{n-k})_{b_k, b_1} \rightarrow \rho_{b_1}$  and the limit distribution for  $H(n)$  exists and satisfies

$$P(S_i = b_i, i = 1, \dots, k) = \rho_{b_1} \prod_{i=1}^{k-1} M_{b_i, b_{i+1}}$$

and satisfies, taking the limit in (1.19),

$$\rho_{b_1} \prod_{i=1}^{k-1} M_{b_i, b_{i+1}} = \sum_{(a_1, \dots, a_{k+1}) \in E_\kappa^{k+1}} \rho_{a_1} \left( \prod_{i=1}^k M_{a_i, a_{i+1}} T_{b_i}^{a_i, a_{i+1}} \right). \quad (1.20)$$

□

**From  $H$  to  $HZ$ .**

**Proposition 1.3.2.** *If the law of a  $M$ -MC is an invariant distribution for a PCA  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  on the line, then seen as acting on the set of measures indexed by  $HZ$ ,  $A$  admits the law of a HZMC with memory 2 as invariant distribution.*

*Proof.* Take  $D_{a,c} = \sum_i M_{a,i} T_{c_i}^{a,i}$  and  $U_{a,c,b} = \frac{M_{a,b} T_{a,b}^{a,b}}{\sum_i M_{a,i} T_{c_i}^{a,i}}$  or 0 if the denominator is 0 (in which case the numerator is 0 too). These kernels have to be understood as

follows:

$$\begin{aligned} P(S(0, 1) = c | S(0, 0) = a) &= D_{a,c} \\ P(S(1, 0) = b | S(0, 0) = a, S(0, 1) = c) &= U_{a,c,b}, \end{aligned}$$

and they satisfy

$$D_{a,c} U_{a,c,b} = M_{a,b} T_{a,b}^c. \quad (1.21)$$

Roughly the Markov 2 property along the zigzag is Markov 1 along a  $D$  steps and Markov 2 along a  $U$  step. Now if the law of a  $M$ -MC is invariant on  $H$ , then for  $\rho$  stochastic LE of  $M$ , we have by (1.21)

$$\begin{aligned} P(S(i, 0) = a_i, i = 0, \dots, n+1, S(i, 1) = b_i, i \in 0, \dots, n) &= \rho_{a_0} \prod_{i=0}^n M_{a_i, a_{i+1}} T_{b_i}^{a_i, a_{i+1}} \\ &= \rho_{a_0} \prod_{i=0}^n D_{a_i, b_i} U_{a_i, b_i, a_{i+1}} \end{aligned}$$

which is indeed the representation of a Markov 2 process with MK  $(D, U)$  on  $HZ$ .  $\square$

*Remark 1.3.3.* In the previous proof we saw that if  $M$  is Markov on  $H$ , then it is Markov 2 on  $HZ$  with memory 1 on a down step, and 2 on a up step. What it is true too, is that to this kind of process one can associate a Markov 1 process with MK  $M'$  on  $H$  with values in  $E_\kappa^2$  (as illustrated on Figure 1.3) by “putting together” the state  $S_t(i)$  and  $S_{t+1}(i)$ . The associated PCA is  $A' = (\mathbb{Z}, E_\kappa^2, N, T')$

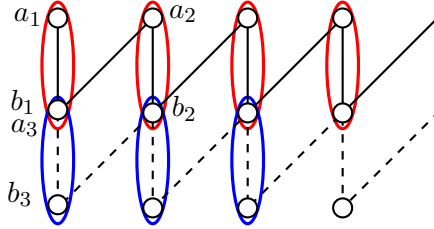


Figure 1.3 – From PCA with Markov 2 invariant distribution to PCA with Markov 1.

with  $T'_{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = 1_{b_1=a_3} T_{b_1, b_2}^{a_1, a_2}$  and the MK is

$$M'_{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = U_{a_1, b_1, a_2} D_{a_2, b_2}.$$

Nevertheless the PCA  $A'$  has a lot of transitions equal to 0 which makes that our criterion for Markovianity fails.

**From  $\mathbf{HZ}(n)$  to  $\mathbf{H}(n)$  and from  $\mathbf{HZ}$  to  $\mathbf{H}$ .** We have already said that the restrictions of a HZMC on  $\mathbf{HZ}_t$  (resp. a HZCMC on  $\mathbf{HZ}_t(n)$ ) on the lines on  $\mathbf{H}_t$  and  $\mathbf{H}_{t+1}$  (resp.  $\mathbf{H}_t(n)$  and  $\mathbf{H}_{t+1}(n)$ ) were MC (resp. CMC). As a consequence, if a PCA  $A := (\mathbb{L}, E_\kappa, N, T)$  seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\mathbf{HZ}})$  (resp.  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\mathbf{HZ}(n)})$ ) admits the law of a HZMC (resp. HZCMC) as invariant distribution, then seen as acting on  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\mathbf{H}})$  (resp.  $\mathcal{M}(E_\kappa^{\mathbf{H}(n)})$ ), it admits the law of a MC (resp. CMC) as invariant distribution.

*Remark 1.3.4.* • The converse is not true. Indeed as seen in Section 1.1.3 if  $T_{1,1}T_{0,0} = T_{1,0}T_{0,1}$  or  $T_{1,1}T_{0,0} = T_{0,1}T_{1,0}$ , a product measure is invariant on  $\mathbf{H}$  but one can check that in these cases the stationary distribution on  $\mathbf{HZ}$  is not a HZMC.

**From  $\mathbf{HZ}$  to  $\mathbf{HZ}(n)$ .**

**Proposition 1.3.5.** *Let  $A := (\mathbb{Z}, E_\kappa, N, T)$  be a PCA. If the law of the  $(D, U)$ -HZMC on  $\mathbf{HZ}$  is invariant by  $A$  then the law of the  $(D, U)$ -HZMC on  $\mathbf{HZ}(n)$  is invariant by  $A$ .*

*Proof.* Just compare the hypothesis of Theorems 1.2.1 and 1.2.5. □

**From  $\mathbf{H}$  to  $\mathbf{H}(n)$ .** In the case  $\kappa = 1$ , there exists some PCA that have a product measure invariant on  $\mathbf{H}$  that are not Markov on  $\mathbf{H}(n)$ . To be invariant on  $\mathbf{H}(n)$  for infinitely many  $n$  implies that the matrices  $(Q_x^\rho, x \in \{0, 1\})$  have rank 1 (Proposition 1.2.8 (b)). In Section 1.1.3 we have seen that, when  $T_{1,0}T_{0,1} = T_{1,1}T_{0,0}$ , a product measure was invariant on  $\mathbf{H}$ . The computation in this case (in the positive rate case) gives  $\rho_0 = \left( \frac{1-T_{1,1}}{T_{1,0}+T_{0,1}} \right)$ ; and with this value one checks that neither  $Q_0^\rho$  nor  $Q_1^\rho$  have rank 1. This does not prove the non existence of a product measure depending on  $n$ , invariant by the PCA acting on  $\mathbf{H}(n)$ .

## 1.4 Proofs of Theorems 1.2.2, 1.2.6 and 1.2.4

We prove Theorem 1.2.4 at the end of the section.

To prove Theorem 1.2.2 and 1.2.6 we will use the characterisation given by Theorem 1.2.1 (the proof of Theorem 1.2.6 is similar, see Remark 1.4.3). First we will show the crucial following Lemma, a cornerstone of the paper.

**Lemme 1.4.1.** *Let  $T$  be a positive rate TM. The two conditions **Cond 5** and **Cond 3** are equivalent. They are also equivalent to the existence of a pair of MK  $(D, U)$  satisfying **Cond 1**.*

*Proof.* • Assume first that there exists  $(D, U)$  satisfying **Cond 1**, and let us see that **Cond 5** is satisfied: substitute  $T_{i,j}$  by their expression in terms of  $(D, U)$  as specified in **Cond 1** in the equation defining **Cond 5**, and check that both sides are equal.

- Proof of **Cond 5**  $\Rightarrow$  **Cond 3**: take  $a' = b' = c' = 0$  in **Cond 5**.
- Proof that **Cond 3** implies the existence of  $(D, U)$  satisfying **Cond 1**. Suppose **Cond 3** holds and let us find  $D$  and  $U$  such that

$$\frac{D_{a,b}U_{b,a'}}{(DU)_{a,a'}} = T_{a,a'}^b, \text{ for any } a, b, a'. \quad (1.22)$$

It suffices to find  $D$  and  $U$  such that

$$D_{a,b}U_{b,a'} = \frac{T_{a,0}T_{0,a'}}{T_{0,0}^b} G[a, a'] \quad (1.23)$$

for some numbers  $(G[i, j], 0 \leq i, j \leq \kappa)$ , since in this case

$$\frac{D_{a,b}U_{b,a'}}{(DU)_{a,a'}} = \frac{\frac{T_{a,0}T_{0,a'}}{T_{0,0}^b} G[a, a']}{\sum_i \frac{T_{a,0}T_{0,a'}}{T_{0,0}^i} G[a, a']} = \frac{\frac{T_{a,0}T_{0,a'}}{T_{0,0}^b}}{\frac{T_{a,0}T_{0,a'}}{T_{0,0}^0}} = T_{a,a'}^b. \quad (1.24)$$

Now, a solution to (1.23) is given by

$$D_{a,b} = \frac{T_{a,0}}{T_{0,0}^b} A_a B_b, \quad U_{b,a'} = T_{0,a'}^b \frac{C_{a'}}{B_b}, \quad G[a, a'] = A_a C_{a'} \quad (1.25)$$

where  $C = (C_a, 0 \leq a \leq \kappa)$  is any array of positive numbers,  $B = (B_a, 0 \leq a \leq \kappa)$  is chosen such that  $U$  is a MK, and then  $A = (A_a, 0 \leq a \leq \kappa)$  such that  $D$  is a MK.  $\square$

We now characterise the set of solutions  $(D, U)$  to **Cond 1** when  $T$  satisfies **Cond 3**.

**Proposition 1.4.2.** *Let  $T$  with positive rate satisfying **Cond 3**. The set of pairs  $(D, U)$  solutions to **Cond 1** is the set of pairs  $\{(D^\eta, U^\eta), \eta \in \mathcal{M}^*(E_\kappa)\}$  (indexed by the set of distributions  $\eta = (\eta_a, 0 \leq a \leq \kappa)$  with full support) as defined in (1.12).*

*Proof.* Assume that **Cond 3** holds. By Lemma 1.4.1, there exists  $(D, U)$  satisfying **Cond 1**, that is such that for any  $0 \leq a, b, c \leq \kappa$ ,  $T_{a,b}(DU)_{a,b} = D_{a,c}U_{c,b}$ . If all the  $T_{a,b}$  are positive, then for any  $a, b$ ,  $D_{a,b}$  and  $U_{a,b}$  are also positive, and then one gets

$$D_{a,c}U_{c,b} = \frac{D_{a,0}U_{0,b}}{T_{a,b}^0} T_{a,b}^c \quad (1.26)$$

and then

$$(DU)_{a,b} = \frac{D_{a,0}U_{0,b}}{T_{a,b}_0}. \quad (1.27)$$

In the positive rate case, it is also true that if  $(D, U, T)$  satisfies (1.26) and (1.27) then  $(D, U)$  satisfies **Cond 1**. Observe that (1.26) implies (summing over  $b$ ),

$$D_{a,c} = D_{a,0} \sum_b \frac{U_{0,b}}{T_{a,b}_0} T_{a,b}_c, \quad (1.28)$$

and then by (1.26) again (replacing  $D_{a,c}$  by the right hand side of (1.28)) we get

$$U_{c,b} = \frac{\frac{U_{0,b}}{T_{a,b}_0} T_{a,b}_c}{\sum_{b'} \frac{U_{0,b'}}{T_{a,b'}_0} T_{a,b'}_c}. \quad (1.29)$$

Notice at the right hand side, one can replace  $a$  by 0 since **Cond 3** holds.

Now, summing over  $c$  in (1.28) we get

$$D_{a,\star} = 1 = \sum_c \sum_b \frac{D_{a,0}U_{0,b}}{T_{a,b}_0} T_{a,b}_c = \sum_b \frac{D_{a,0}U_{0,b}}{T_{a,b}_0}, \quad (1.30)$$

which implies

$$D_{a,0} = \left( \sum_b U_{0,b}/T_{a,b}_0 \right)^{-1}. \quad (1.31)$$

We then see clearly that the distributions  $\eta$  defined by

$$\eta_b = U_{0,b}, \quad b = 0, \dots, \kappa$$

can be used to parametrise the set of solutions. Replacing  $U_{0,b}$  by  $\eta_b$  in (1.31), we obtain that  $D_{a,0} = \left( \sum_b \eta_b/T_{a,b}_0 \right)^{-1}$ . Now, using this formula in (1.28) and again the fact that  $U_{0,b} = \eta_b$ , we get the representation of  $D^\eta$  as defined in (1.12). The representation of  $U^\eta$  (provided in (1.12)) is obtained by replacing  $U_{0,b}$  by  $\eta_b$  in (1.29).

We have established that  $(D, U)$  satisfies **Cond 1** implies  $(D, U) = (D^\eta, U^\eta)$  for  $\eta = (U_{0,b}, b \in E_\kappa)$ .

Reciprocally, take any distribution  $\eta \in \mathcal{M}^\star(E_\kappa)$  and let us check that

$$\frac{D_{a,c}^\eta U_{c,b}^\eta}{\sum_{c'} D_{a,c'}^\eta U_{c',b}^\eta} = T_{a,b}_c \quad (1.32)$$



(the definition of  $D^\eta$  and  $U^\eta$  are given in (1.12)). It is convenient to start by noticing that under **Cond 3** for any  $a, b, c$ ,

$$U_{c,b}^\eta = \frac{\frac{\eta_b}{T_{0,b}^0} T_{0,b}^c}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{0,b'}^0} T_{0,b'}^c} = \frac{\frac{\eta_b}{T_{a,b}^0} T_{a,b}^c}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{a,b'}^0} T_{a,b'}^c}.$$

Thanks to this, one sees that

$$D_{a,c}^\eta U_{c,b}^\eta = \frac{1}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{a,b'}^0}} \frac{\frac{\eta_b}{T_{a,b}^0} T_{a,b}^c}{1}$$

from which (1.32) follows readily.  $\square$

We end now the proof of Theorem 1.2.2. A consequence of the previous considerations is that there exists  $(D, U)$  satisfying **Cond 1** and **Cond 2** iff there exists  $\eta$  such that  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$ , and of course, in this case  $(D, U) = (D^\eta, U^\eta)$  satisfies **Cond 1**. Not much remains to be done: we need to determine the existence (or not) and the value of  $\eta$  for which  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$  and if such a  $\eta$  exists compute the invariant distribution of the MC with MK  $U^\eta$  and  $D^\eta$ .

We claim now that if  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$ , then  $\eta = \gamma$  the stochastic Perron-LE of  $X$ . As a consequence there exists at most one distribution  $\eta$  such that  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$ . To show this claim proceed as follows. Assume that there exists  $\eta$  such that  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$  (where  $D^\eta U^\eta$  is given in (1.33), and  $U^\eta D^\eta$  is computed as usual, starting from (1.12)). By (1.27) and (1.31) we have

$$(D^\eta U^\eta)_{a,b} = \frac{1}{\sum_d \frac{\eta_d}{T_{a,d}^0}} \frac{\eta_b}{T_{a,b}^0}. \quad (1.33)$$

Hence  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$  is equivalent to, for any  $a, b$ ,

$$\frac{1}{\sum_d \frac{\eta_d}{T_{a,d}^0}} \frac{\eta_b}{T_{a,b}^0} = \sum_c \frac{\frac{\eta_c}{T_{0,c}^0} T_{0,c}^a}{\sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{0,b'}^0} T_{0,b'}^a} \frac{\sum_\ell \frac{\eta_\ell}{T_{c,\ell}^0} T_{c,\ell}^b}{\sum_{b''} \frac{\eta_{b''}}{T_{c,b''}^0} T_{c,b''}^b}. \quad (1.34)$$

Replace  $\frac{T_{c,\ell}^b}{T_{c,\ell}^0}$  by  $\left(\frac{T_{0,\ell}^b}{T_{0,\ell}^0}\right) \frac{T_{0,0}^c T_{c,0}^b}{T_{c,0}^0 T_{0,0}^b}$  and introduce

$$g_a = \left( \sum_d \eta_d / T_{a,d}^0 \right)^{-1}, \quad f_a = \sum_{b'} \frac{\eta_{b'}}{T_{0,b'}^0} T_{0,b'}^a, \quad (1.35)$$

(1.34) rewrites, for any  $a, b$ ,

$$g_a \frac{\eta_b}{T_{a,b}_0} = \sum_c \frac{\frac{\eta_c}{T_{0,c}_0} T_{0,c}_a}{f_a} f_b \frac{T_{0,0} T_{c,0}_b}{T_{c,0} T_{0,0}_b} g_c, \quad (1.36)$$

and, using **Cond 3** again,  $\frac{1}{T_{0,c}_0} \frac{T_{0,0} T_{c,0}_b}{T_{c,0} T_{0,0}_b} = \frac{T_{c,c}_b}{T_{c,c}_0 T_{0,c}_b}$ , (1.36) is equivalent to, for any  $a, b$ ,

$$\frac{g_a \eta_b}{T_{a,b}_0} = \frac{f_b}{f_a} \sum_c \frac{g_c \eta_c}{T_{c,c}_0} \frac{T_{0,c}_a}{T_{0,c}_b} T_{c,c}_b. \quad (1.37)$$

The question is still here to find/guess, for which TM  $T$  there exists  $\eta$  solving this system of equations (some  $\eta'$ 's are also hidden in  $g$  and  $f$ ). In the sequel we establish that there exists at most one  $\eta$  that solves the system: it is  $\gamma$ . For this we notice that for  $a = b$  this system (1.37) simplifies:  $(D^\eta U^\eta)_{a,a} = (U^\eta D^\eta)_{a,a}$  (for any  $a$ ) is equivalent to

$$\frac{g_a \eta_a}{T_{a,a}_0} = \sum_c \frac{g_c \eta_c}{T_{c,c}_0} T_{c,c}_a, \quad \text{for any } a \quad (1.38)$$

which is equivalent to the matrix equation:

$$\left[ \frac{g_a \eta_a}{T_{a,a}_0}, a = 0, \dots, \kappa \right] = \lambda^* \nu, \quad (1.39)$$

where  $\nu$  is the stochastic Perron-LE of  $Y$  and  $\lambda^*$  some free parameter. By (1.35), (1.39) rewrites

$$\frac{1}{\sum_d \frac{\eta_d}{T_{a,d}_0}} \frac{\eta_a}{T_{a,a}_0} = \lambda^* \nu_a$$

and taking the inverse, we see that  $\eta$  needs to be solution to

$$\sum_d \eta_d \frac{T_{a,a}_0 \nu_a}{T_{a,d}_0} = \frac{1}{\lambda^*} \eta_a. \quad (1.40)$$

The only possible  $\eta$  is then  $\gamma$  the unique Perron-LE of  $X$  (which can be normalised to be stochastic), and we must have

$$1/\lambda^* = \lambda, \quad (1.41)$$

the Perron-eigenvalue of  $X$ . Hence  $D^\eta U^\eta = U^\eta D^\eta$  implies  $\eta = \gamma$ . Nevertheless this does not imply  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$  and then the condition  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$  remains in Theorem 1.2.2 (what is true in all cases is  $(D^\gamma U^\gamma)_{a,a} = (U^\gamma D^\gamma)_{a,a}$  for any  $a$ ).

However when  $\kappa = 1$  this is sufficient since one can deduce the equality of two MK  $K$  and  $K'$  from  $K_{0,0} = K'_{0,0}$  and  $K_{1,1} = K'_{1,1}$  only. This is why in Theorem 1.2.2 a slight simplification occurs for the case  $\kappa = 1$ . When  $\kappa > 1$  this is no more sufficient.

*Remark 1.4.3.* This ends the proof of Theorem 1.2.6 since we see that **Cond 3** and  $\text{Diagonal}(DU) = \text{Diagonal}(UD)$  imply  $\eta = \gamma$  (the converse in Theorem 1.2.6 is easy). And the discussion just above the remark suffices to check the statement concerning the case  $\kappa = 1$ .

It remains to find the stochastic Perron-LE  $\rho$  of  $D^\gamma U^\gamma$ .

Consider (1.33), where  $\eta$  is now replaced by  $\gamma$ . By (1.40) and (1.41), we have

$$(D^\gamma U^\gamma)_{a,b} = (1/\lambda) \frac{T_{0,a}^{a,a} \nu_a \gamma_b}{T_{a,b}^{a,b} \gamma_a}.$$

Hence,  $\rho$  is characterized as the vector whose entries sum to 1, and such that,

$$\sum_a \frac{T_{0,a}^{a,a} \nu_a \gamma_b}{T_{a,b}^{a,b} \gamma_a} \rho_a = \lambda \rho_b, \quad \text{for any } b \in E_\kappa. \quad (1.42)$$

Taking  $\mu_i = \rho_i / \gamma_i$ , (1.42) is equivalent to

$$\sum_a \frac{T_{0,a}^{a,a} \nu_a}{T_{a,b}^{a,b}} \mu_a = \lambda \mu_b, \quad \text{for any } b \in E_\kappa$$

which means that  $\mu$  is the Perron-RE of  $X$ . We have obtained that  $\rho_i = \mu_i \gamma_i$ . Since  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$ , the Perron-LE of  $D^\gamma$  and  $U^\gamma$  coincide with that of  $D^\gamma U^\gamma$ . This ends the proof of Theorem 1.2.2.

#### 1.4.1 Proof of Theorem 1.2.4

We follow the arguments of the proof of Theorem 1.2.2 and adapt them slightly to the present case. The only difference is that **Cond 6** replaces the positive rate condition.

Lemma 1.4.1 still holds if instead of the positive rate condition we take **Cond 6** (Remark 1.2.4 is needed to see why **Cond 3**  $\Rightarrow$  **Cond 5**, and the positivity of  $T_{a,0}^{a,a}$  and  $T_{0,b}^{0,b}$  to see that there exists  $(D, U)$  satisfying moreover  $(DU)_{a,b} > 0$  for all  $a, b$ ). Also, we have  $D_{a,0} > 0$ ,  $U_{0,b} > 0$ ,  $D_{0,a} > 0$  and  $U_{0,b} > 0$  for any  $a, b$  by **Cond 1**. In (1.12),  $D_{a,c}^\eta$  and  $U_{c,b}^\eta$  are well defined under **Cond 6** only. (1.26) still holds for the same reason, and again the pair of conditions (1.26) and (1.27) is equivalent to **Cond 3** under **Cond 6** only. (1.28) still holds, but there is a small problem for (1.29) since the division by  $D_{a,c}$  is not possible for all  $a$ . The  $D_{a,c}$  (for fixed  $c$ ) are

not 0 for all  $a$  since  $D_{0,c} > 0$ . So (1.29) holds for the  $a$  such that  $D_{a,c} > 0$ . If all the  $T_{a,b} = 0$  then take  $U_{c,b}^\gamma = 0$ . The rest of the proof of Theorem 1.2.2 can be adapted with no additional problem.  $\square$



## Chapitre 2

# Automates cellulaires probabilistes avec un alphabet quelconque

## 2.1 Introduction

### CA and PCA with finite alphabet

*Cellular automata* (CA), as described by Hedlund [Hed69], are discrete local dynamical systems on a space  $E^{\mathbb{L}}$  where  $E = \{0, \dots, \kappa\}$  is a finite alphabet, the set of states of cells, and  $\mathbb{L}$  is a discrete lattice. Formally, a cellular automaton  $A$  is a tuple  $(\mathbb{L}, E, N, f)$  where

- $\mathbb{L}$  is a lattice, called set of cells. In this paper,  $\mathbb{L}$  is  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- $N$  is the neighborhood function: for  $i \in \mathbb{L}$ ,  $N(i) = (i + l : l \in L)$  where  $L \subset \mathbb{L}$  is finite. Each neighborhood has cardinality  $|N| = |L|$ . In the paper,  $N(i) = (i, i + 1)$  when the lattice is  $\mathbb{N}$  or  $\mathbb{Z}$  and  $N(i) = (i, i + 1 \bmod n)$  when the lattice is  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- $f$  is the local rule. It is a function  $f : E^{|N|} \rightarrow E$ .

The CA  $\mathbf{A} = (\mathbb{L}, E, N, f)$  defines a global function  $F : E^{\mathbb{L}} \mapsto E^{\mathbb{L}}$  on the set of configurations  $E^{\mathbb{L}}$ . For any configuration  $S_0 = (S_0(i) : i \in \mathbb{L})$ , the image  $S_1 = F(S_0)$  of  $S_0$  by  $F$  is defined by, for any  $j \in \mathbb{L}$ ,  $S_1(j) = f((S_0(i) : i \in N(j)))$ .

In words, the state of all cells are updated simultaneously and the state  $S_1(j)$  of the cell  $j$  at time 1 depends only of the states  $(S_0(i) : i \in N(j))$  of its neighborhood at time 0. Hence, the dynamics is the following: starting from an initial configuration  $S_{t_0} \in E^{\mathbb{L}}$  at time  $t_0$ , the successive states of the system are  $(S_t : t \geq t_0)$  where  $S_{t+1} = F(S_t)$ . The sequence of configurations  $S = (S_t = (S_t(i) : i \in \mathbb{L}), t \geq t_0)$  is called the space-time diagram of  $\mathbf{A}$ . The state  $S_t(i)$  of the cell  $i$  at time  $t$  will be denoted  $S(i, t)$ .

*Probabilistic cellular automata* (PCA) with finite alphabets are generalizations of CA in which the states  $(S(i, t) : i \in \mathbb{L}, t \geq t_0)$  are random variables (r.v.) defined on a common probability space  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , each of the r.v.  $S(i, t)$  taking a.s. its value in  $E$ . Seen as random process,  $S$  is equipped with the  $\sigma$ -field generated by the cylinders. The definition of PCA relies on a transition matrix  $T$  indexed by  $E^{|N|} \times E$  (instead of a local rule  $f$ ), which gives the distributions of the state of a cell at time  $t + 1$  conditionally on those of its neighborhood at time  $t$ :

$$P(S(j, t + 1) = b \mid (S(i, t) = a_i : i \in N(j))) = T((a_i : i \in N(j)); b).$$

Conditionally on  $S_t$ , the states  $(S(j, t + 1) : j \in \mathbb{L})$  are independent (see Eq (2.1)). The transition matrix  $T$  is then an array of non negative numbers satisfying, for any  $(a_1, \dots, a_{|N|}) \in E^{|N|}$ ,  $\sum_{b \in E} T((a_1, \dots, a_{|N|}); b) = 1$ . Formally, a PCA  $\mathbf{A}$  with a

finite alphabet  $E$  is an operator  $\mathcal{F} : \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}}) \mapsto \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  on the set of probability distributions  $\mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  on the set of configurations. If  $S_0$  has distribution  $\mu_0$ , then  $S_1$  has distribution  $\mu_1 = \mathcal{F}(\mu_0)$ . We can also define  $\mu_1$  directly from  $\mu_0$  and  $T$ , by giving

its finite-dimensional distribution (Kolmogorov extension theorem), by: for any finite subset  $C \subset \mathbb{L}$  and for any  $(b_j : j \in C) \in E^C$ ,

$$\mu_1((b_j : j \in C)) = \sum_{(a_i)_{i \in N(C)} \in E^{N(C)}} \mu_0((a_i : i \in N(C))) \prod_{j \in C} T((a_i : i \in N(j)); b_j) \quad (2.1)$$

where  $N(C) = \bigcup_{j \in C} N(j)$ . A measure  $\mu \in \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  is said to be *invariant* by  $\mathbf{A}$  if  $\mathcal{F}(\mu) = \mu$ .

The simplest case of PCA is the two colors case  $E = \{0, 1\}$  on  $\mathbb{Z}$  with neighborhood  $N(i) = (i, i + 1)$ . They have been deeply studied and lots of results about them are known, see Toom [TVS<sup>+</sup>90]. For example, Belyaev [BGM69] characterized the set of PCA possessing as invariant distribution a Markov chain indexed by  $\mathbb{Z}$ . Nevertheless, there are still interesting open problems about them: for instance, the question whether all positive rate PCA (i.e., for any  $a, b, c \in \{0, 1\}$ ,  $T(a, b; c) > 0$ ) are ergodic or not is still open.

So far, it has been observed in different frameworks that explicit calculus of the invariant distribution of PCA can be done only if the transition matrix satisfies some algebraic equations (that forms a manifold in terms of the  $(T(a, b; c) : a, b, c \in E)$ ). In Belyaev [BGM69] this is shown for PCA with 2-letter alphabet whose invariant distributions are Markov chains or product measures. In Vasilyev [Vas78] [KV80], this is shown for quasi-reversible PCA on  $\mathbb{Z}^d$  with finite alphabet whose invariant distribution are Markov chains or Gibbs measures. In Dai-Pra [DPLR02], this is done for PCA on  $\mathbb{Z}^d$  with a 2-letter alphabet and whose invariant distributions are Gibbs measures. And, in Casse and Marckert [CM15a], the same phenomenon is observed for PCA on  $\mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  with a finite alphabet letting a Markov chain invariant. Hence, literature focuses on characterizing PCA having simple invariant measures: product measures and Markov chains for  $|N| = 2$  and Gibbs measures for PCA on  $\mathbb{Z}^d$ . In addition to [BGM69], the study of PCA on  $\mathbb{Z}$  admitting an invariant product measure have been done by Mairesse and Marcovici [MM14b] (in a finite alphabet case). For PCA letting a Markov chain invariant, in addition to [BGM69] and [CM15a], Bousquet-Mélou [BM98] characterizes those on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  with a 2-letter alphabet and Toom [TVS<sup>+</sup>90] gives a sufficient condition for PCA on  $\mathbb{Z}$  with a finite alphabet.

The most general results are given in [CM15a] where it is proved (in Theorem 2.6) that a positive PCA on  $\mathbb{Z}$  with two neighbors and a finite alphabet  $E = \{0, \dots, \kappa\}$  admits an horizontal zigzag Markov chain (see Definition 2.1.7) as invariant distribution if and only if the two following conditions are satisfied:



1. for any  $a, b, c \in E$ ,

$$T(a, b; c)T(a, 0; 0)T(0, b; 0)T(0, 0; c) = T(a, b; 0)T(a, 0; c)T(0, b; c)T(0, 0; 0) \text{ and}$$

2.  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$

$$\text{where } D^\gamma(a; c) = \frac{\sum_{k \in E} \frac{\gamma(k)}{T(a, k; 0)} T(a, k; c)}{\sum_{k \in E} \frac{\gamma(k)}{T(a, k; 0)}} \text{ and } U^\gamma(c; b) = \frac{\frac{\gamma(b)}{T(0, b; 0)} T(0, b; c)}{\sum_{k \in E} \frac{\gamma(k)}{T(0, k; 0)} T(0, k; c)} \text{ for}$$

any  $a, b, c \in E$  where  $\gamma$  is an eigenvector of an explicit matrix that depends only of  $T$ . This theorem is an extension of Theorem 3 of [BGM69] valid only for 2 letters alphabet.

### PCA with general alphabet

Inspired by this recent work, we investigate in this paper the case where the alphabet  $E$  is general (finite or infinite, discrete or not). As we have to define probability distributions on  $E$ , as usual in probability theory, we will assume that  $E$  is a Polish space (a separable complete metrizable space) equipped with its Borel set  $\mathcal{B}(E)$ . It could be finite or infinite and discrete or not. In the following, when we write “general alphabet”, we are thinking about a Polish space alphabet.

CA and PCA with infinite alphabets appear in the literature under different forms. In [BMdEOR13], CA with alphabet  $E = [0, 1]$  are used to solve the classification problem with arbitrary precision: the classification problem consists in finding a CA such that, on any initial configuration of 1s and 0s on the line  $\mathbb{Z}$ , the CA configuration converges to the line colored 1 if the initial fraction  $r$  of 1s is greater than  $1/2$  and to the line colored 0 if  $r < 1/2$ . CA with alphabet  $E = \mathbb{R}$  permit to model the heat equation [Sch11]. Theorems of surjectivity of CA have been extended to CA whose alphabets are (possibly infinite) objects in some concrete category and then assure that some CA with infinite alphabets have a Garden of Eden (a configuration that does not have a predecessor) [CSC13]. Recently, a complex PCA with infinite and continuous alphabet have been proposed to model the urban dynamics in [VGAA05]. In Section 2.2.3, we will see that the synchronous TASEP on  $\mathbb{R}$  defined by Blank [Bla12] (it is a discrete time, synchronous, space continuous version of the TASEP studied by Derrida & al. [DDM92]) could be modeled by a PCA on  $\mathbb{Z}$  with alphabet  $E = \mathbb{R}$  and neighborhood  $N(i) = (i, i + 1)$ . Hence, PCA with general alphabets are already present in the literature even if they are not generally studied as such.

We believe that the present approach of PCA with general alphabets permits to connect different domains and points of view. The structure of the set of PCA having

the distribution of a Markov chain as invariant measure is shown to be characterized by some algebraic-integral equations. These equations are reminiscent of the standard algebraic relations (in the parameters space) appearing in

- statistical physics around the notion of integrable systems,
- combinatorics where really often, exact computations can be done only for simple structures for which generating functions solve “simple” functional equations [FS09],
- probability theory where invariant distribution of Markov chain on  $\mathbb{Z}$  can be computed in some rare cases (conditioned random walks, birth and death processes), this being again related to some algebraic questions.

Here, Theorem 2.1.2 and Prop 2.1.10 have exactly this flavor and this is a case where everything is quite transparent. If a Markov chain is conserved by a PCA (see Eq (2.4)) then an infinite system of algebraic-integral equations having the form “a product equals a sum of products” possesses a solution. Underlying this paper is the following: “which PCA possesses a Markov chain?” (or anything else one may prefer) must be seen as an algebraic question in the discrete case, and as an algebraic-integral question in the continuous one, solved here.

Theorem 2.1.2 and Prop 2.1.10 provide the form of the solutions, those which explain such “miraculous” simplification in the infinite system (Eq (2.4)).

First, let us define formally PCA with general alphabets. In this case, transition matrices are replaced by transition kernels: let  $F$  and  $G$  be two Polish spaces,  $K = (K(x; Y) : x \in F, Y \in \mathcal{B}(G))$  is a *transition kernel* (t.k.) from  $F$  to  $G$ : if, for all  $Y \in \mathcal{B}(G)$ ,  $x \mapsto K(x; Y)$  is  $\mathcal{B}(F)$ -measurable and if, for all  $x \in F$ ,  $Y \mapsto K(x; Y)$  is a probability measure on  $(G, \mathcal{B}(G))$ .

**Définition 2.1.1** (Probabilistic cellular automata with a general alphabet). Let  $E$  be a Polish space,  $\mathbb{L}$  a lattice,  $N$  a neighborhood function and  $T$  a t.k. from  $E^{|\mathbb{L}|}$  to  $E$ . A PCA  $A$  is a tuple  $(\mathbb{L}, E, N, T)$  that defines an operator  $\mathcal{F} : \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}}) \mapsto \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$  where, for any  $\mu_0 \in \mathcal{M}(E^{\mathbb{L}})$ ,  $\mu_1 = \mathcal{F}(\mu_0)$  is such that: for any finite subset  $C \subset \mathbb{L}$ , for any  $(B_j : j \in C) \in \mathcal{B}(E)^C$ ,

$$\mu_1((B_j : j \in C)) = \int_{E^{N(C)}} \left( \prod_{j \in C} T((a_i : i \in N(j)); B_j) \right) d\mu_0((a_i : i \in N(C))). \quad (2.2)$$

As usual, the measure  $\mu_1$  is defined by its finite-dimensional distributions. If  $E$  is finite, this definition is similar to the classical definition of PCA.

**Example 2.1.2** (Gaussian PCA). For any  $m, \sigma > 0$ , we define a PCA  $(\mathbf{G}_{m, \sigma})$  on  $\mathbb{N}$  with alphabet  $\mathbb{R}$  and neighborhood  $N(i) = (i, i + 1)$  as follows. The t.k. of  $\mathbf{G}_{m, \sigma}$  is

the following: for all  $a, b \in \mathbb{R}$  and Borel set  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$T(a, b; C) = P \left( \mathcal{N} \left( \frac{a+b}{m}, \sigma^2 \right) \in C \right)$$

where  $\mathcal{N}(c, \sigma^2)$  is a Gaussian random variable with mean  $c$  and variance  $\sigma^2$ . In Section 2.2.2, we prove that an invariant measure of this PCA is related to autoregressive processes of order 1.

The *aim of the paper* is to shed some light on the structure of the set of PCA with a general alphabet (finite or infinite, discrete or not) having a Markovian invariant distribution on lattices  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . In this case, some important complications arise (compared with the finite case).

The first one is the following. In the case of a finite alphabet, it is known that each PCA admits at least one invariant probability distribution [TVS<sup>+</sup>90, p.25]. This property fails when the alphabet size is infinite:

**Example 2.1.3.** Consider the following (infinite) transition matrix  $T$  defined, for any  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , by

$$T(a, b; c) = \frac{1}{2} (1_{\max(a,b)+1}(c) + 1_{a+b+1}(c)). \quad (2.3)$$

The PCA indexed by  $\mathbb{N}$  having  $T$  as transition matrix, does not admit any invariant probability measure since for any  $(t, i)$ ,  $S(i, t+1) \geq S(i, t) + 1$  and, so,  $S(i, t) \rightarrow \infty$  as  $t \rightarrow \infty$ .

The second one is due to measurability issues. In continuous probability, two distributions having a density are equal if these densities differ at most on a Lebesgue negligible set. This fact holds in a more general context: if  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are two probability measures absolutely continuous with respect to a  $\sigma$ -finite measure  $\mu$ , then,  $\nu_1 = \nu_2$  iff their Radon-Nikodym-derivatives with respect to  $\mu$  are equal  $\mu$ -almost everywhere.

Now, assume that  $M$  and  $M'$  are two Markov kernels, such that  $M(x; \cdot) = M'(x; \cdot)$  except possibly for some  $x$  in a  $\mu$ -negligible set. Under this condition, it may exist some distribution  $\rho$  so that the two Markov chain with initial distribution  $\rho$  and respective Markov kernels  $M$  and  $M'$  do not coincide in distribution.

For PCA with any general alphabet, the same complications arise: a unique PCA can have some “plural behaviors”. Hence, in this paper, each time a PCA  $\mathbf{A}$  is studied, a  $\sigma$ -finite measure  $\mu$  is specified and, formally, it is on the pair  $(\mathbf{A}, \mu)$  that the conditions and/or results hold.

**Example 2.1.4** (Gaussian PCA except on the diagonal). Let  $m, \sigma > 0$ . We define the PCA  $(\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma})$  on  $\mathbb{N}$  with alphabet  $\mathbb{R}$ . Its t.k.  $\tilde{T}$  is the same as that of  $\mathbf{G}_{m,\sigma}$  (see Example 2.1.2) except when  $a = b$ , in this case, for any  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{T}(a, a; C) = \delta_a(C)$  where  $\delta_a$  is the Dirac measure in  $a$ .

The PCA  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  has the same behavior as  $\mathbf{G}_{m,\sigma}$  if the initial state  $S_{t_0}$  does not contain two consecutive cells in the same state, i.e. for any  $i$ ,  $S(i, t_0) \neq S(i+1, t_0)$ . But, if for example its initial state is  $0^{\mathbb{N}}$ , then it will stay in this configuration until the end.

### $\mu$ -supported and $\mu$ -positive transition kernels

Before stating our main results we recall some facts around Radon-Nikodym theorem.

Recall that if  $\mu$  and  $\nu$  are two measures on  $E$ , such that  $\mu$  is *absolutely continuous* with respect to  $\nu$  ( $\mu \ll \nu$ ), there exists a unique (up to a  $\nu$ -null set)  $\nu$ -measurable function  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that, for all  $A \in \mathcal{B}(E)$ ,  $\mu(A) = \int_A f d\nu$ . The function  $f$  is denoted  $\frac{d\mu}{d\nu}$  and called Radon-Nikodym-derivative of  $\mu$  with respect to  $\nu$  (or  $\nu$ -density). We say that  $\nu$  and  $\mu$  are *positive equivalent* if  $\nu \ll \mu$  and  $\mu \ll \nu$ . In that case,  $\frac{d\mu}{d\nu} > 0$  and  $\frac{d\nu}{d\mu} > 0$ ,  $\mu$ -almost everywhere.

If  $\mu$  is a measure on  $E$  and  $d \in \mathbb{N}$ , then  $\mu^d$  will stand for the product measure on  $E^d$ .

Now, we define the two crucial notions used all along the paper:  $\mu$ -supported and  $\mu$ -positive t.k.

**Définition 2.1.5.** Let  $E$  be a Polish space,  $\mu$  a  $\sigma$ -finite measure on  $E$  and  $d \in \mathbb{N}$ . Let  $K$  be a t.k. from  $E^d$  to  $E$ ,  $K$  is said to be  $\mu$ -supported if for  $\mu^d$ -a.e.  $(x_1, \dots, x_d)$ ,  $K(x_1, \dots, x_d; \cdot) \ll \mu$ . If moreover, for  $\mu^d$ -a.e.  $(x_1, \dots, x_d)$ ,  $\mu \ll K(x_1, \dots, x_d; \cdot)$ , then  $K$  is said to be  $\mu$ -positive.

For  $K$  a  $\mu$ -supported t.k. from  $E^d$  to  $E$ , the  $\mu$ -density of  $K$  is the  $\mu^{d+1}$ -measurable function  $k$  such that

$$\begin{aligned} k : E^{d+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k(x_1, \dots, x_d; y) &\longmapsto \frac{dK(x_1, \dots, x_d; \cdot)}{d\mu}(y). \end{aligned}$$

If, moreover,  $K$  is  $\mu$ -positive, then, for  $\mu^{d+1}$ -a.e.  $(x_1, \dots, x_d, y)$ ,  $k(x_1, \dots, x_d; y) > 0$ .

In the following, we will work with  $\mu$ -supported or  $\mu$ -positive kernels for  $d = 1$  (transition kernels of Markov chain) or  $d = |N| = 2$  (transition kernels of PCA). We will see that such transition kernels permit to work with densities instead of measures. In the following, the Radon-Nikodym-derivative of any measure with respect to  $\mu$  will be also shorten in  $\mu$ -density.

An example of a Lebesgue-supported t.k. is the t.k.  $T$  of Gaussian PCA (defined in Example 2.1.2). This t.k. is even Lebesgue-positive. In the following, we call a  $\mu$ -supported (resp.  $\mu$ -positive) PCA a PCA whose t.k. is  $\mu$ -supported (resp.  $\mu$ -positive).

*Remark 2.1.6.* (a) There exists t.k. that are not  $\mu$ -supported by any  $\sigma$ -finite measure  $\mu$ . For example, the t.k.  $T$  from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}$  defined by, for any  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$T(a, b; C) = \begin{cases} \delta_a(C) & \text{if } a \neq b \\ \int_C \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-a)^2}{2}} dc & \text{if } a = b \end{cases} \text{ is not } \mu\text{-supported.}$$

Indeed, any measure  $\mu$  that could support this PCA has necessarily an atom at each  $x$  in  $\mathbb{R}$ . Then,  $\mu$  is not a  $\sigma$ -finite measure.

(b) At the opposite, there exists some t.k. that are supported by several singular measures. The PCA  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  of Example 2.1.4 is Lebesgue-positive and, also,  $\delta_a$ -positive for any  $a \in \mathbb{R}$ .

(c) Nevertheless, if a PCA  $\mathbf{A}$  is  $\mu$  and  $\nu$ -positive, then  $\mu$  and  $\nu$  are positive equivalent or singular. Indeed, if there exists  $(a, b) \in E^2$  such that the measure  $T(a, b; \cdot)$  is both  $\mu$  and  $\nu$ -positive then they are positive equivalent by transitivity. Else,  $P_\mu = \{(a, b) : T(a, b; \cdot) \text{ is } \mu\text{-positive}\}$  and  $P_\nu = \{(a, b) : T(a, b; \cdot) \text{ is } \nu\text{-positive}\}$  are measurable and disjoint, and so taking  $N = P_\nu \subset P_\mu^c$ ,  $\mu(N) = 0$  and  $\nu(N^c) = 0$ , i.e.  $\mu \perp \nu$ .

We will make apparent below (in particular in Section 2.2.1 and 2.2.2) that to describe the invariant distribution of a PCA, at least in the case where it admits a Markov chain as invariant distribution, we have to work under a reference measure  $\mu$  which depending on the case can be the Lebesgue measure, a discrete measure, or any  $\sigma$ -finite measure. The idea is that the PCA can be seen to be trapped on some subsets of  $E^\mathbb{Z}$  of the type  $A^\mathbb{Z}$  where  $A$  is the support of a measure  $\mu$ . When such a trap exists, criteria to be an invariant distribution will depend on  $\mu$  only (and its support). An example of that is the PCA  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  of Example 2.1.4 for which we will find different invariant distributions according to whether the reference measure is the Lebesgue-measure or  $\delta_a$ .

The PCA studied in this work correspond to  $\mu$ -supported PCA and its subset of  $\mu$ -positive PCA for  $\mu$  a  $\sigma$ -finite measure. For both sets, we characterize PCA that have an invariant horizontal zigzag Markov chain, as defined now.

Let us define the horizontal zigzag Markov chains (HZMC) on  $\mathbb{N}$ . First, the geometrical structure of *horizontal zigzag* is: the  $t$ th horizontal zigzag on a space-time

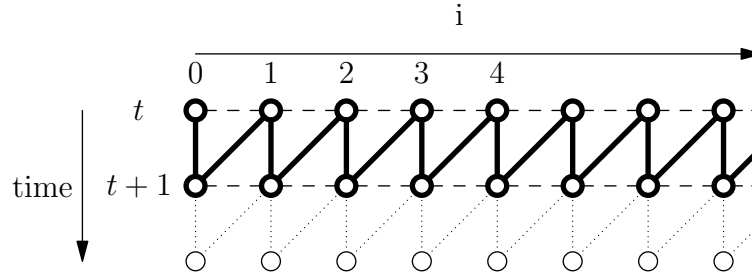


Figure 2.1 – In bold,  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$ , the  $t$ th horizontal zigzag on  $\mathbb{N}$  on a space time diagram.

diagram is

$$\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t) = \left\{ \left( \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, t + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \right), i \in \mathbb{N} \right\}$$

as illustrated in Figure 2.1.

Since  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  is made by two lines corresponding to two successive times, a PCA  $\mathbf{A}$  on  $\mathbb{N}$  can be seen as acting on the configurations of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}$ . The image of a configuration  $(S(i, t), S(i, t+1) : i \in \mathbb{N})$  on  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  by the PCA  $\mathbf{A}$  is  $(S(i, t+1), S(i, t+2) : i \in \mathbb{N})$  on  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t+1)$ . Where the configuration of the second line of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  becomes the configuration of the first line of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t+1)$  and the configuration of the second line of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t+1)$  is the image by  $\mathbf{A}$  of the second line of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$ .

**Définition 2.1.7.** An *horizontal zigzag Markov chain* (HZMC) on  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  with general alphabet  $E$  is a Markov chain with two t.k.  $D$  (for down) and  $U$  (for up) from  $E$  to  $E$  and an initial probability distribution  $\rho_0$  on  $E$  such that

1. the distribution of state  $S(0, t)$  is  $\rho_0$ ,
2. the distribution of state  $S(i, t+1)$  knowing  $S(i, t) = x_i$  is  $D(x_i; \cdot)$  and
3. the distribution of state  $S(i+1, t)$  knowing  $S(i, t+1) = y_i$  is  $U(y_i; \cdot)$ .

In the following, we study under which conditions a PCA admits a HZMC as invariant distribution. For  $\mu$ -supported PCA, the HZMC itself will be  $\mu$ -supported: a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is  $\mu$ -supported if,  $\rho_0 \ll \mu$  and  $D$  and  $U$  are  $\mu$ -supported. In that case, we denote  $r_0, d$  and  $u$  their respective  $\mu$ -densities. Hence, a  $\mu$ -supported  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is invariant by a  $\mu$ -supported PCA with t.k.  $T$ , if, for any  $k \geq 0$ ,

for  $\mu$ -a.e.  $b_0, b_1, \dots, b_{k+1}, c_0, \dots, c_k \in E$ ,

$$\begin{aligned} r_0(b_0) \left( \prod_{i=0}^k d(b_i; c_i) u(c_i; b_{i+1}) \right) \\ = \int_{E^{k+3}} r_0(a_0) \left( \prod_{i=0}^{k+1} d(a_i; b_i) u(b_i; a_{i+1}) \right) \left( \prod_{i=0}^k t(b_i, b_{i+1}; c_i) \right) d\mu^{k+3}(a_0, \dots, a_{k+2}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

The *support*  $\tilde{E}_{(\rho_0, D, U)}$  of a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC on  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  is the union of the support of the marginals of the first line of the HZMC, i.e.  $\tilde{E}_{(\rho_0, D, U)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{supp}(\rho_i)$  where  $\rho_i$  is the distribution of  $S(i, t)$ . When the  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is  $\mu$ -supported, then, for  $\mu$ -a.e.  $x \in \tilde{E}_{(\rho_0, D, U)}$ , there exists  $i \in \mathbb{N}$  such that  $r_i(x) > 0$  (that holds because  $E$  is a Polish space). In the case of a  $\mu$ -positive  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC,  $\tilde{E}_{(\rho_0, D, U)} = \text{supp}(\mu)$ . When the context is clear,  $\tilde{E}_{(\rho_0, D, U)}$  will be denoted  $\tilde{E}$ .

*Remark 2.1.8.* Take two  $\mu$ -supported PCA  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{A}'$  with t.k.  $T$  and  $T'$  with support  $\tilde{E}$  such that  $T$  and  $T'$  coincide except on a  $\mu^2$ -negligible set, i.e.

$$\mu^2(\{a, b : T(a, b; \cdot) \neq T'(a, b; \cdot)\}) = 0.$$

Such PCA are said to be  $\mu$ -equivalent. They have the same set of invariant  $\mu$ -supported HZMC. To see this, change  $t$  by  $t'$  in Eq (2.4).

Let  $\mu$  be a measure on  $E$  and  $d : (a, c) \mapsto d(a; c)$  and  $u : (c, b) \mapsto u(c; b)$  be two  $\mu^2$ -measurable functions from  $E^2$  to  $\mathbb{R}$ , then the  $\mu^2$ -measurable function  $\overline{du}$  from  $E^2$  to  $\mathbb{R}$  is defined by  $\overline{du}(a; b) = \int_E d(a; c) u(c; b) d\mu(c)$ . For a  $\mu$ -supported HZMC,  $\overline{du}(a; b)$  is the  $\mu$ -density of the t.k.  $(DU)$  of the Markov chain (induced by the HZMC) on the first line  $S_t = (S(i, t) : i \in \mathbb{N})$  of  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$ .

## Main results

We start with a generalization to Polish space alphabets of Lemma 2.3 in [CM15a].

**Theorem 2.1.1.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on a general alphabet  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{N}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -supported PCA and  $(\rho_0, D, U)$  a  $\mu$ -supported HZMC with support  $\tilde{E}$ . The  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is invariant by  $\mathbf{A}$  if and only if the three following conditions are satisfied:*

**Cond 9:** for  $\mu^3$ -a.e.  $(a, b, c) \in \tilde{E}^3$ ,  $t(a, b; c) \overline{du}(a; b) = d(a; c) u(c; b)$ ,

**Cond 10:** for  $\mu^2$ -a.e.  $(a, b) \in \tilde{E}^2$ ,  $\overline{du}(a; b) = \overline{ud}(a; b)$ ,

**Cond 11:** the Markov chain with t.k.  $D$  possesses  $\rho_0$  as invariant distribution,

i.e. for  $\mu$ -a.e.  $c$ ,  $r_0(c) = \int_E r_0(a)d(a; c)d\mu(a)$ .

We arrive to our main Theorem 2.1.2. When a PCA with t.k.  $T$  is  $\mu$ -positive, we can go further and reduce the existence of an invariant HZMC for the PCA to the existence of a function  $\eta$  solution to a cubic integral equation on  $T$ . In case of existence, we can express the kernels of the invariant HZMC using  $\eta$  and  $T$ . Let us first introduce some material.

Let  $\mathbf{A}$  be a PCA with t.k.  $T$  whose  $\mu$ -density is  $t$ . Define, for any positive measurable function  $\phi \in L^1(\mu)$  (i.e. for  $\mu$ -a.e.  $x \in E$ ,  $\phi(x) > 0$  and  $\int_E \phi(x)d\mu(x) < \infty$ ), the two  $\mu^2$ -measurable functions  $d^\phi : E^2 \mapsto \mathbb{R}$  and  $u^\phi : E^2 \mapsto \mathbb{R}$  by

$$d^\phi(a; c) = \frac{\int_E \frac{\phi(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}{\int_E \frac{\phi(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \text{ and } u^\phi(c; b) = \frac{\frac{\phi(b)}{t(a_0, b; c_0)} t(a_0, b; c)}{\int_E \frac{\phi(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; c) d\mu(x)}. \quad (2.5)$$

**Theorem 2.1.2.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on a general alphabet  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{N}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -positive PCA.  $\mathbf{A}$  admits a  $\mu$ -positive invariant HZMC if and only if the three following conditions are satisfied:*

**Cond 12:** *there exists a triplet  $(a_0, b_0, c_0) \in E^3$  such that  $T(a_0, b_0; \cdot)$  and  $\mu$  are positive equivalent and, for  $\mu^3$ -a.e.  $(a, b, c)$ ,*

$$t(a, b; c) t(a_0, b_0; c) t(a_0, b; c_0) t(a, b_0; c_0) = t(a_0, b_0; c_0) t(a, b; c_0) t(a, b_0; c) t(a_0, b; c), \quad (2.6)$$

**Cond 13:** *there exists a positive function  $\eta \in L^1(\mu)$  solution to: for  $\mu^2$ -a.e.  $(a, b)$  and for the  $(a_0, c_0)$  of **Cond 12**,*

$$\frac{\frac{\eta(b)}{t(a, b; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} = \int_E \frac{\frac{\eta(c)}{t(a_0, c; c_0)} t(a_0, c; a)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} d\mu(x)} \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} t(c, x; b) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; a) d\mu(x)} d\mu(c), \quad (2.7)$$

**Cond 14:** *the Markov chain with t.k.  $D^n$ , whose  $\mu$ -density is  $d^n$  given by Eq (2.5), possesses a (unique) invariant probability distribution  $\rho_0$  such that  $\rho_0$  and  $\mu$  are positive equivalent.*

*In this case, the  $(\rho_0, D^n, U^n)$ -HZMC where  $D^n$  and  $U^n$  are t.k. of  $\mu$ -densities given by Eq (2.5) is invariant by  $\mathbf{A}$ .*



*Remark 2.1.9.* • The uniqueness of  $\rho_0$  comes from Lemma 2.1.12 presented below. It implies that the  $\mu$ -positive  $(\rho_0, D^\eta, U^\eta)$ -HZMC is necessarily taken under its invariant probability distribution, i.e. for any  $i \in \mathbb{L}$ ,  $\rho_i = \rho_0$ .

• If **Cond 12** and **Cond 13** hold and if  $E$  is finite, the Markov chain with t.k.  $D^\eta$  is irreducible and aperiodic (because, for any  $a, c \in E$ ,  $D^\eta(a; c) > 0$ ) and, so, it possesses a unique invariant distribution, i.e. **Cond 14** always holds. If  $E$  is not finite, we refer the reader to the book of Meyn and Tweedie [MT09] to get some conditions on  $D^\eta$  for which the Markov chain with t.k.  $D^\eta$  possesses an invariant distribution.

When the alphabet is finite, we can go further and show that  $\eta$  satisfying Eq (2.7) is, in fact, an eigenvector of a computable matrix [CM15a]. That permits to simplify **Cond 13**. For PCA with a general alphabet, this can not be done because we are not allowed to take  $a = b$  in Eq (2.7) in general. Nevertheless, under stronger conditions on  $t$ , we can characterize a set of functions that contains the set of functions  $\eta$  solutions to Eq (2.7).

**Proposition 2.1.10.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on a general alphabet  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{Z}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -positive PCA. Suppose that **Cond 12** and the two following conditions are satisfied:*

**Cond 15:** *for the same triplet  $(a_0, b_0, c_0)$  of **Cond 12**, for  $\mu^2$ -a.e.  $(a, c)$ ,*

$$t(a, a; c)t(a_0, b_0; c)t(a_0, a; c_0)t(a, b_0; c_0) = t(a_0, b_0; c_0)t(a, a; c_0)t(a, b_0; c)t(a_0, a; c), \quad (2.8)$$

**Cond 16:** *there exists a positive function  $\eta \in L^1(\mu)$  solution to: for  $\mu$ -a.e.  $a$  and for the  $(a_0, c_0)$  of **Cond 12**,*

$$\frac{\frac{\eta(a)}{t(a, a; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(k)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} = \int_E \frac{\frac{\eta(c)}{t(a_0, c; c_0)} t(a_0, c; a)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} d\mu(x)} \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} t(c, x; a) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; a) d\mu(x)} d\mu(c). \quad (2.9)$$

*Then,  $\eta$  is a positive eigenfunction of*

$$\mathcal{A}_2 : f \mapsto \left( \mathcal{A}_2(f) : a \mapsto \int_E f(k) \frac{t(a, a; c_0)}{t(a, x; c_0)} \nu(a) d\mu(x) \right)$$

*where  $\nu$  is a positive eigenfunction (unique up to a multiplicative constant) in  $L^1(\mu)$  of*

$$\mathcal{A}_1 : f \mapsto \left( \mathcal{A}_1(f) : a \mapsto \int f(c) t(c, c; a) d\mu(c) \right).$$

*Remark 2.1.11.* • Any positive PCA with finite alphabet  $E$  (i.e. for all  $a, b, c$ ,  $T(a, b; c) > 0$ ) is a  $\mu_E$ -positive PCA where  $\mu_E$  is the counting measure on  $E$ . Hence, **Cond 15** and **Cond 16** are necessarily implied by **Cond 12** and **Cond 13** in the case of finite alphabets. Moreover, in that case,  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  have their own unique eigenfunction (due to Perron-Frobenius theorem) and **Cond 14** holds necessarily. So, applying Theorem 2.1.2 and Prop 2.1.10 to positive PCA give Theorem 2.6 in [CM15a].

• Let  $E = \mathbb{R}$  and  $\mu$  be the Lebesgue measure. In the case where  $t$  is *continuous at any point* of  $E^3$ , then **Cond 12** and **Cond 13** imply **Cond 15** and **Cond 16** by continuity. And so a solution  $\eta$  to Eq (2.7) is a function  $\eta$  given by Prop 2.1.10.

• If for a PCA  $\mathbf{A}$  the conditions of Prop 2.1.10 do not hold, it is in general complex to find a function  $\eta$  solution to Eq (2.7). But, it may happen that a  $\mu$ -equivalent PCA  $\mathbf{A}'$  to  $\mathbf{A}$  (see Remark 2.1.8) satisfies the conditions of Prop 2.1.10. Hence, in the best-case scenario, we can characterize a  $(\rho_0, D^\eta, U^\eta)$ -HZMC invariant by  $\mathbf{A}'$  using Prop 2.1.10. This HZMC is also invariant by  $\mathbf{A}$ . The  $\mu$ -equivalence gives some “degrees of freedom” to solve the “rigid” integral cubic equation Eq (2.7). An application of this method is shown in Section 2.2.2 where it is proved that AR(1) process is an invariant distribution of  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  (defined in Example 2.1.4).

The uniqueness (up to a multiplicative constant) of the eigenfunction  $\nu$  (in Prop 2.1.10) is a consequence of the following lemma.

**Lemme 2.1.12** (Theorem 6.8.7 of Durrett [Dur10]). *Let*

$$\mathcal{A}: f \mapsto \left( \mathcal{A}(f) : y \mapsto \int_E f(x) m(x; y) \mu(dx) \right)$$

*be an integral operator of kernel  $m$ . If  $m$  is the  $\mu$ -density of a  $\mu$ -positive t.k.  $M$  from  $E$  to  $E$ , then  $\mathcal{A}$  possesses at most one positive eigenfunction in  $L^1(\mu)$  (up to a multiplicative constant).*

## Content

Section 2.2 is dedicated to some examples of PCA. In Section 2.2.1, we show applications of Theorems 2.1.1 and 2.1.2 and Prop 2.1.10 to PCA with finite alphabets. In Section 2.2.2, we use Theorem 2.1.2 and Prop 2.1.10 to show that the law of an autoregressive process of order 1 (AR(1) process) is invariant by both Gaussian PCA  $\mathbf{G}_{m,\sigma}$  and  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  (defined in Example 2.1.2 and 2.1.4). In Section 2.2.2, we present a Lebesgue-supported PCA called Beta PCA. In Section 2.2.3, we present first a PCA with alphabet  $\mathbb{R}$  that simulates a synchronous TASEP on  $\mathbb{R}$  as defined by Blank [Bla12] and, then, a PCA with alphabet  $\mathbb{R}$  that simulates the first-passage

percolation as presented by Kesten [Kes87] on a particular graph  $\mathcal{G}$ . Unfortunately, Theorem 2.1.1 and 2.1.2 do not apply to these two PCA.

In Section 2.3, Theorems 2.1.1 and 2.1.2 and Prop 2.1.10, the main contributions of the paper, are proved.

Section 2.4 is devoted to extensions of Theorems 2.1.1 and 2.1.2 for PCA on  $\mathbb{Z}$  and  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . First, we extend in both cases the notion of HZMC:  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  on  $\mathbb{Z}$  and cyclic-HZMC (CHZMC) on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (if  $E$  is finite, a CHZMC is a HZMC conditioned to be periodic and, in the general case, it is a Gibbs measure). Then, we characterize PCA letting  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  invariant, and also PCA letting CHZMC invariant.

## 2.2 Examples

Our first examples are PCA with finite alphabets. Then, we introduce two new models: Gaussian PCA and Beta PCA to illustrate our theorems. Finally, we present PCA with infinite alphabets that model existing problems in literature: one PCA models a synchronous TASEP on  $\mathbb{R}$  as defined by Blank [Bla12] and another one a variant of directed first-passage percolation.

All PCA presented in this section are PCA on  $\mathbb{N}$  (except the PCA modeling TASEP that is on  $\mathbb{Z}$ ) and neighborhood  $N(i) = (i, i + 1)$ .

### 2.2.1 PCA with finite alphabet

For positive PCA, see the first point of Remark 2.1.11. For any finite set  $E$  denote by  $\mu_E = \sum_{x \in E} \delta_x$  the counting measure on  $E$ . In the following example, we focus on PCA that are not positive and we take a PCA not  $\mu_E$ -positive, but  $\mu_F$ -positive for some  $F$  subsets of  $E$ .

Let  $\mathbf{A}$  be the PCA with alphabet  $E = \{0, 1, 2\}$  and transition matrix:

- $T(0, i; i) = T(i, 0; i) = 1$  for all  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,
- $T(1, 1; 1) = T(1, 1; 2) = T(2, 2; 1) = T(2, 2; 2) = 1/2$ ,
- $T(1, 2; 1) = T(2, 1; 2) = 4/5$ ,
- $T(1, 2; 2) = T(2, 1; 1) = 1/5$ .

This PCA is not positive ( $T(0, 1; 0) = 0$ ), nevertheless it is  $\mu_{\{0\}}$ -positive ( $T(0, 0; \cdot) = \mu_{\{0\}}(\cdot)$ ) and, also,  $\mu_{\{1, 2\}}$ -positive. These two measures are singular as “predicted” by (c) of Remark 2.1.6.

Application of Theorem 2.1.2 and Prop 2.1.10 to  $\mathbf{A}$  seen as a  $\mu_{\{0\}}$ -positive (resp.  $\mu_{\{1, 2\}}$ -positive) PCA permits to compute an invariant  $\mu_{\{0\}}$ -positive (resp.  $\mu_{\{1, 2\}}$ -positive) HZMC. They are the only possible invariant HZMC for  $\mathbf{A}$ . In fact, these invariant HZMC could also be obtained using theorems of [BGM69] and [CM15a] to  $\mathbf{A}$  restricted to get its value in alphabet  $\{0\}$  or  $\{1, 2\}$ .

**A  $\mu$ -supported PCA :** Let **A** be the PCA with alphabet  $E = \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$  with t.k.  $T$  such that  $T(a, b; \cdot)$  is the uniform distribution on  $E$  if  $b = a$  or  $b = a + 1 \pmod{\kappa}$ , and on the circular interval  $\{a + 1, \dots, b - 1\}$  else. This PCA is a  $\mu_E$ -supported PCA, but not  $\mu$ -positive for any measure  $\mu$  on  $E$ . It has an invariant  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC with  $D(a; a + 1 \pmod{\kappa}) = U(a; a + 1 \pmod{\kappa}) = 1$  for all  $a \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$  and for any  $a \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$ ,  $\rho_0(\kappa) = 1/\kappa$ . This invariant HZMC seems to be the unique invariant HZMC for **A** (proved for  $\kappa = 3, 4, 5$  by Theorem 2.1.1 and Maple to solve the conditions of this Theorem). But, we do not know if there exists some other invariant distribution(s) (which would be not HZMC) for **A**.

### 2.2.2 Two new models of PCA with infinite alphabet

#### Gaussian PCA.

Denote by  $g[m, \sigma]$  the density of the Gaussian distribution of mean  $m$  and variance  $\sigma^2$ .

**Gaussian PCA  $\mathbf{G}_{m, \sigma}$ .** For  $\mathbf{G}_{m, \sigma}$ , it can be checked that **Cond** 12 holds for any triplet  $(a_0, b_0, c_0)$  in  $\mathbb{R}^3$ , so let us choose  $(a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 0)$ . We use Prop 2.1.10 to obtain a function  $\eta$ . The first step consists in studying the eigenfunctions of

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 : L^1 &\longrightarrow L^1 \\ f &\longmapsto \mathcal{A}_1(f) : c \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(a) g[2a/m, \sigma](c) da \end{aligned}$$

The function  $\nu(x) = \exp\left(-\frac{c_m}{2\sigma^2}x^2\right)$  is a positive eigenfunction of  $\mathcal{A}_1$ , for  $c_m = 1 - \frac{4}{m^2}$ . Moreover, we need  $\nu$  to be in  $L^1$ , hence  $c_m$  must be positive and, so, we need  $|m| > 2$ . Without this condition, for any  $i$ , the function  $t \rightarrow \text{Var}(S(i, t))$  increases and goes to infinity with  $t$ . When  $|m| > 2$ , we can go further with Prop 2.1.10 and study the eigenfunctions of

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 : L^1 &\longrightarrow L^1 \\ f &\longmapsto \mathcal{A}_2(f) : a \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(b) \frac{t(a, a; 0)\nu(a)}{t(a, b; 0)} db \end{aligned}$$

with

$$\frac{t(a, a; 0)\nu(a)}{t(a, b; 0)} = \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\left(\frac{a+b}{m}\right)^2}{2\sigma^2}\right).$$

One can check that  $\eta(x) = \exp\left(-\frac{(1+\sqrt{c_m})x^2}{4\sigma^2}\right)$  is a positive eigenfunction of  $\mathcal{A}_2$  associated to the eigenvalue  $\frac{\sqrt{\pi\sigma^2}}{(1+\sqrt{c_m})^2}$ . Moreover  $\eta$  satisfies Eq (2.7) (this is an example

where Prop 2.1.10 permits to compute a solution  $\eta$  to Eq (2.7)). We get  $d^\eta(a; c) = g \left[ \frac{2}{ml} a, \sqrt{\frac{2}{l}} \sigma \right](c)$  and  $u^\eta(c; b) = g \left[ \frac{2}{ml} c, \sqrt{\frac{2}{l}} \sigma \right](b)$  for  $l = 1 + \sqrt{c_m}$ . To end, we need to find an invariant probability distribution  $\rho_0$  for the Markov chain of t.k.  $D^\eta$  (with density  $d^\eta$ ). The measure  $\rho_0$  with density  $r_0$  is fine:  $r_0(x) = g \left[ 0, c_m^{-1/4} \sigma \right](x)$ .

This permits to conclude that the  $(\rho_0, D^\eta, U^\eta)$ -HZMC is an invariant measure for the Gaussian PCA. In fact, this invariant HZMC is an autoregressive process of order 1 (AR(1) process, see [WH97]) that is a process  $(X_i)$  such that  $X_i = \theta + \phi X_{i-1} + \epsilon_i$  where  $\theta$  and  $\phi$  are two real numbers and  $(\epsilon_i)$  are independent and identically distributed of law the Gaussian law  $\mathcal{N}(0, \sigma'^2)$ . In our case, the invariant HZMC is an AR(1) process on  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}$  with  $\theta = 0$ ,  $\phi = \frac{2}{ml}$  and  $\sigma'^2 = \frac{2\sigma^2}{l}$ .

**“Gaussian PCA except on diagonal”  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$ .** As already seen in (b) of Remark 2.1.6, this PCA is Lebesgue-positive and also  $\mu_{\{a\}}$ -positive for any  $a \in \mathbb{R}$ .

When we consider  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  as a Lebesgue-positive PCA, Prop 2.1.10 cannot be used to find a solution  $\eta$  to Eq (2.7). Hopefully,  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$  is Lebesgue-equivalent to  $\mathbf{G}_{m,\sigma}$ . Hence, by Remark 2.1.8, the invariant Lebesgue-positive  $(\rho_0, D^\eta, U^\eta)$ -HZMC, that corresponds to an AR(1) process, obtained for  $\mathbf{G}_{m,\sigma}$  is also invariant for  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$ . Besides, for any  $a \in \mathbb{R}$ , the constant process equal to  $a$  everywhere is also an invariant measure to  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,\sigma}$ .

### Beta PCA.

We define a class of PCA with alphabet  $\mathbb{R}$  depending on three positive real parameters  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $m$ . The t.k. is the following: for all  $a, b \in \mathbb{R}$  and  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$T(a, b; C) = P((b - a)X + a - m \in C)$$

where  $X$  is a Beta( $\alpha, \beta$ ) random variable. In words, the PCA takes a random (following a Beta law) number between the two values of its two neighbors and subtract  $m$  to it.

This PCA is Lebesgue-supported, but not Lebesgue-positive.

Now, we try to search an invariant  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC to this PCA. Let  $\theta$  be a positive real number. Let

$$D_1(a; C) = P(X_1 + a - m \in C) \text{ and } U_1(c; B) = P(X_2 + c + m \in B)$$

where  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) is a Gamma( $\alpha, \theta$ ) (resp. Gamma( $\beta, \theta$ )) random variable. For  $D = D_1$  and  $U = U_1$ , **Cond** 9 and **Cond** 10 hold; unfortunately, there does not

exist a probability distribution  $\rho_0$  that satisfies **Cond 11**. Hence, this PCA does not possess a Lebesgue-supported HZMC as invariant distribution. Nevertheless, the image of a Lebesgue-supported  $(\rho, D_1, U_1)$ -HZMC by this PCA is the  $(\rho D_1, D_1, U_1)$ -HZMC, meaning that one can describe simply the distribution of the successive image of a  $(\rho, D_1, U_1)$ -HZMC by  $A$ .

### 2.2.3 PCA with infinite alphabet in the literature

#### PCA modeling TASEP.

We model the synchronous TASEP on  $\mathbb{R}$  introduced by Blank [Bla12] by a PCA on  $\mathbb{Z}$  with alphabet  $\mathbb{R}$ . In the following, when we say TASEP, we refer to this variant of TASEP. TASEP models the behavior of an infinite number of particles of same radius  $r \geq 0$  on the real line, that move to the right, that do not bypass, not overlap and, at each step of time, each particle moves with probability  $p$  ( $0 < p \leq 1$ ), independently of each others. When a particle moves, it travels a distance  $v \geq 0$  to the right, except if it can create a collision with the next particle, in that case, it moves to the rightmost allowed position. In this model, the state of a cell  $i$  at time  $t$  is the position  $x_i^t$  of the  $i$ th particle at time  $t$ . Formally, the evolution of  $(x_i^t)$  is the following:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} \min(x_i^t + v, x_{i+1}^t - 2r) & \text{with probability } p, \\ x_i^t & \text{with probability } 1 - p. \end{cases}$$

We propose, here, to model this TASEP by a PCA **A** on  $\mathbb{Z}$  with alphabet  $\mathbb{R}$ . The t.k. of the PCA is the following: for any  $a, b \in \mathbb{R}$  such that  $a + r \leq b - r$  and for any  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$T(a, b; C) = \begin{cases} (1 - p)\delta_a(C) + p\delta_{a+v}(C) & \text{if } a + v \leq b - 2r, \\ (1 - p)\delta_a(C) + p\delta_{b-2r}(C) & \text{if } a + v > b - 2r. \end{cases}$$

The t.k. for other pairs  $(a, b)$  is not specified since they concern forbidden configurations. Hence, if we start with an admissible configuration at time 0 for the PCA (i.e. for any  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $S(i, 0) + r \leq S(i + 1, 0) - r$ ), then the PCA models the TASEP.

We can remark that if  $v = 2r$  and, for any  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i(t) \in 2r\mathbb{Z}$ , then  $x_i(t+1) \in 2r\mathbb{Z}$  for any  $i$ . In terms of PCA, this says that the PCA **A** is  $\mu$ -supported for  $\mu = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{2ri}$ . Rescaling this alphabet by  $1/(2r)$ , this PCA models a synchronous TASEP on  $\mathbb{Z}$  [MM14a, Section 2.3]. It is known that this TASEP possesses a family of invariant Markov chains distributions indexed by a parameter  $q \in (0, p)$  [MM14a, Section 4.3]. As a consequence, the corresponding PCA owns some “quasi” invariant distributions (see below to understand the exact meaning of “quasi”). It appears that

these “quasi” invariant distributions are  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  (see Section 2.4.1). The t.k. of the  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  are  $D$  and  $U$  defined by, for any  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{Z})$ ,

$$D(a; C) = \frac{1-p}{1-q} \delta_a(C) + \frac{p-q}{1-q} \delta_{a+1}(C), \quad (2.10)$$

$$U(a; C) = \sum_{m=1}^{\infty} q \frac{(p-q)^{m-1}}{p^m} \delta_{a+m}(C). \quad (2.11)$$

One can verify that these two t.k. satisfy **Cond 9** and **Cond 10** of Theorem 2.4.1 (see Section 2.4.1). **Cond 18** holds only in the degenerated case where  $q = p$ . In that case, all the (deterministic)  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  which satisfy  $S(i+1, t) = S(i+1, t+1) = S(i, t) + 1$  for any  $i$  and  $t$  are invariant by **A**. They correspond to the infinite traffic jam where nobody can move. Else, for  $q \in (0, p)$ ,  $D$  does not possess an invariant probability measure and so **Cond 18** cannot hold. Nevertheless, the image of a  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  is the  $(R', D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  with  $\rho'_i = \rho_i D$ , meaning that one can describe simply the distribution of the successive images of a  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  by **A** (that is the sense of the “quasi”). In addition, with this view of TASEP, the mean speed of particles is simple to obtain: it is  $D(a; a+1) = (p-q)/(1-q)$ .

### PCA modeling a variant of first-passage percolation.

We propose a model of directed first-passage percolation on a directed graph which can be seen as a PCA with alphabet  $[0, \infty)$ . We use the same notation as Kesten [Kes87] to present the classical model of first-passage percolation.

The set of nodes of  $\mathcal{G}$  is  $\mathbb{N}^2$  and the set of directed edges is  $\mathcal{E} = \{((i, j), (i, j+1)) : i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{((i+1, j), (i, j+1)) : i, j \in \mathbb{N}\}$ . We let  $L_0 = \{(i, 0) : i \in \mathbb{N}\}$  the set of the nodes of the first line. Now associate with the edges some i.i.d. weights  $(t(e), e \in \mathcal{E})$ , with common distribution  $F$ , where  $t(e)$  is the time needed to pass through edge  $e$ . The passage time of a directed path  $r = (e_1, \dots, e_n)$  on

$\mathcal{G}$  is  $T(r) = \sum_{i=1}^n t(e_i)$ . The travel time from a node  $u$  to a node  $v$  is defined as

$T(u, v) = \inf\{T(r) : r \text{ is a directed path from } u \text{ to } v\}$ . If there is no directed path from  $u$  to  $v$ ,  $T(u, v) = \infty$ . We define the travel time from  $U \subset \mathbb{N}^2$  to a node  $v$  by  $T(U, v) = \inf\{T(u, v) : u \in U\}$ . Finally, we define  $\mathcal{V}(t) = \{v \in \mathcal{N} : T(L_0, v) \leq t\}$  the set of nodes visited at time  $t$ . The object of study in the first-passage percolation is this set  $\mathcal{V}(t)$ .

The first-passage percolation on  $\mathcal{G}$  can be seen as a PCA **A** on  $\mathbb{N}$  with alphabet  $[0, \infty)$  as follows: let  $S(i, j)$  represents the travel time  $T(L_0, (i, j))$  from  $L_0$  to the node  $(i, j)$ . The t.k. of the PCA is the following: for any  $a, b \in [0, \infty)$ , for any

$C \in \mathcal{B}([0, \infty))$ ,  $T(a, b; C) = L_{a,b}(C)$  where  $L_{a,b}$  is the distribution of the random variable  $X = \min\{(a + T_1), (b + T_2)\}$  where  $T_1$  and  $T_2$  are i.i.d. with common law  $F$ .

If  $F$  is non trivial,  $\mathbf{A}$  cannot have an invariant distribution because  $E[S(i, j)] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$  for all  $i$ . Nevertheless, it could exist (for some  $F$ ) two t.k.  $D$  and  $U$  such that if, at time 0, the initial distribution is a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC, then, at time 1, it is the  $(\rho_0 D, D, U)$ -HZMC. Such a property should permit to describe the evolution of  $\mathbf{A}$  as in Section 2.2.2.

## 2.3 Proofs of the main results

### 2.3.1 Proof of Theorem 2.1.1

First: let  $(\rho_0, D, U)$  be a  $\mu$ -supported HZMC invariant by  $\mathbf{A}$  with t.k.  $T$ , a  $\mu$ -supported PCA. For all  $A, B, C \in \mathcal{B}(E)$ , for all  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P(S(i, t) \in A, S(i+1, t) \in B, S(i, t+1) \in C) \\ = \int_{A \times B \times C} r_i(a) d(a; c) u(c; b) d\mu^3(a, b, c) \\ = \int_{A \times B \times C} r_i(a) \overline{du}(a; b) t(a, b; c) d\mu^3(a, b, c) \end{aligned}$$

where  $\rho_i$  is the law of cell  $i$  of  $\mu$ -density  $r_i$ . Taking the difference, we obtain, for all  $A, B, C \in \mathcal{B}(E)$ ,

$$\int_{A \times B \times C} \left( r_i(a) d(a; c) u(c; b) - r_i(a) \overline{du}(a; b) t(a, b; c) \right) d\mu^3(a, b, c) = 0.$$

Hence, since this holds for any Borel set  $A \times B \times C$ ,

$$r_i(a) d(a; c) u(c; b) = r_i(a) \overline{du}(a; b) t(a, b; c)$$

for  $\mu^3$ -a.e.  $(a, b, c) \in E^3$ . If  $a \in \tilde{E}$ , there exists  $i$  such that  $r_i(a) > 0$  a.s. and, then, **Cond 9** holds.

We have also, for all  $A, B \in \mathcal{B}(E)$ , on one hand,

$$\begin{aligned} P(S(i, t+1) \in A, S(i+1, t+1) \in B) \\ = P(S(i, t+1) \in A, S(i+1, t+1) \in B, S(i+1, t) \in E) \\ = \int_{A \times B} r_i(a) \overline{ud}(a; b) d\mu^2(a, b) \end{aligned}$$



because  $(S(0, t), S(0, t + 1), S(1, t), \dots)$  is a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC and, on the other hand,

$$\begin{aligned} & P(S(i, t + 1) \in A, S(i + 1, t + 1) \in B) \\ &= P(S(i, t + 1) \in A, S(i + 1, t + 1) \in B, S(i, t + 2) \in E) \\ &= \int_{A \times B} r_i(a) \overline{du}(a; b) d\mu^2(a, b) \end{aligned}$$

because  $(S(0, t + 1), S(0, t + 2), S(1, t + 1), \dots)$  is also a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC due to its invariance by **A**. Then, as before,  $r_i(a) \overline{ud}(a; b) = r_i(a) \overline{du}(a; b)$  for  $\mu^2$ -a.e.  $(a, b) \in E^2$  and, so, **Cond** 10 holds.

Moreover, the law of  $S(0, t)$  and  $S(0, t + 1)$  must be the same because  $(\rho_0, D, U)$  is invariant by the PCA. Hence, the law of  $S(0, t + 1)$  of  $\mu$ -density  $\int_E r_0(a) d(a; c) d\mu(a)$  must be equal to  $\rho_0$  of  $\mu$ -density  $r_0(c)$ , i.e. **Cond** 11 holds.

Conversely, suppose that **Cond** 9, **Cond** 10 and **Cond** 11 are satisfied. Suppose that the horizontal zigzag  $\text{HZ}_{\mathbb{N}}(t)$  is distributed as a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC. Now, compute the push forward measure of this HZMC by **A**. For any  $n \geq 0$ , for any  $F_{2n+1} = B_0 \times \dots \times B_{n+1} \times C_0 \times \dots \times C_n \in \mathcal{B}(E)^{2n+1}$ .

$$\begin{aligned} & P(S(0, t + 1) \in B_0, S(0, t + 2) \in C_0, \dots, S(n + 1, t + 1) \in B_{n+1}) \\ &= \int_{E^{n+2} \times F_{2n+1}} r_0(a_0) \prod_{i=0}^{n+1} d(a_i; b_i) u(b_i; a_{i+1}) t(b_i, b_{i+1}; c_i) \\ &\quad d\mu^{3n+6}(a_0, \dots, a_{n+2}, b_0, \dots, b_{n+1}, c_0, \dots, c_n) \\ &= \int_{F_{2n+1}} \left( \int_E r_0(a_0) d(a_0; b_0) d\mu(a_0) \right) \prod_{i=0}^n \left( \int_E u(b_i; a_{i+1}) d(a_{i+1}; b_{i+1}) d\mu(a_{i+1}) \right) \\ &\quad \left( \int_E u(b_{n+1}; a_{n+2}) d\mu(a_{n+2}) \right) \prod_{i=0}^n t(b_i, b_{i+1}; c_i) d\mu^{2n+3}(b_0, \dots, b_{n+1}, c_0, \dots, c_n) \\ &= \int_{F_{2n+1}} r_0(b_0) \prod_{i=0}^n \overline{ud}(b_i; b_{i+1}) t(b_i, b_{i+1}; c_i) d\mu^{2n+3}(b_0, \dots, b_{n+1}, c_0, \dots, c_n) \\ &= \int_{F_{2n+1}} r_0(b_0) \prod_{i=0}^n d(b_i; c_i) u(c_i; b_{i+1}) d\mu^{2n+3}(b_0, \dots, b_{n+1}, c_0, \dots, c_n). \end{aligned}$$

This shows that the push forward measure of a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC. Hence, the  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is an invariant measure of **A**.

### 2.3.2 Proof of Theorem 2.1.2

In the case of a  $\mu$ -positive HZMC, taking  $\tilde{E}$  or  $E$  does not make any difference in Theorem 2.1.1. Indeed, by basic properties of measurability: for any property  $P$ ,  $P(x)$  holds for  $\mu$ -a.e.  $x \in E$  if and only if  $P(x)$  holds for  $\mu$ -a.e.  $x \in \text{supp}(\mu) \cap E$  (set equal to  $\tilde{E}$  here). In addition, for a  $\mu$ -positive  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC: for  $\mu^2$ -a.e.  $(a, b) \in E^2$ ,  $\overline{du}(a, b) > 0$ .

To prove Theorem 2.1.2, we first prove Lemmas 2.3.1 and 2.3.2.

**Lemme 2.3.1.** *Let  $\mathbf{A}$  be a  $\mu$ -positive PCA with t.k.  $T$ . The three conditions: **Cond 9**, **Cond 12** and*

**Cond 17:** *For  $\mu^6$ -a.e.  $(a, a', b, b', c, c')$ ,*

$$t(a, b; c)t(a, b'; c')t(a', b; c')t(a', b'; c) = t(a', b'; c')t(a', b; c)t(a, b'; c)t(a, b; c) \quad (2.12)$$

*are equivalent.*

*Proof.* — From **Cond 9** to **Cond 17**: replace in **Cond 17** the expressions of  $t$  by the ones given in **Cond 9**.

— From **Cond 17** to **Cond 12**: we prove its contrapositive. Suppose that, for all  $(a_0, b_0, c_0)$ , **Cond 12** is false. Hence, for all  $(a_0, b_0, c_0) \in E^3$ , either  $T(a_0, b_0; \cdot)$  and  $\mu$  are not positive equivalent, or

$$\mu^3(\{(a, b, c) \text{ such that Eq (2.6) does not hold}\}) > 0. \quad (2.13)$$

But, by definition of  $\mu$ -positivity, the set of  $(a_0, b_0)$  such that  $T(a_0, b_0; \cdot)$  and  $\mu$  are not positive equivalent is  $\mu^2$ -negligible. Hence, for  $\mu^3$ -a.e.  $(a_0, b_0, c_0)$ , Eq (2.13) holds. But, by Fubini theorem,

$$\begin{aligned} & \mu^6(\{(a, b, c, a', b', c') \text{ such that Eq (2.12) does not hold}\}) \\ &= \int_{E^3} \mu^3(\{(a, b, c) \text{ such that Eq (2.6) does not hold}\}) d\mu(a_0, b_0, c_0) > 0 \end{aligned}$$

and on the other hand **Cond 17** is equivalent to

$$\mu^6(\{(a, b, c, a', b', c') \text{ such that Eq (2.12) does not hold}\}) = 0.$$

— From **Cond 12** to **Cond 9**: set

$$d(a; c) = K_a \frac{t(a, b_0; c)}{t(a_0, b_0; c)} \frac{\int_E t(a_0, b; c) d\mu(b)}{\int_E \frac{t(a, b_0; x)}{t(a_0, b_0; x)} d\mu(x)} \text{ and } u(c; b) = \frac{t(a_0, b; c)}{\int_E t(a_0, x; c) d\mu(x)}$$

where  $K_a$  is a normalization constant such that  $\int_E d(a; c) d\mu(c) = 1$ . Then,

$$\overline{du}(a; b) = K_a \int_E \frac{t(a, b_0; c)t(a_0, b; c)}{t(a_0, b_0; c)} \frac{1}{\int_E \frac{t(a, b_0; x)}{t(a_0, b_0; x)} d\mu(x)} d\mu(c),$$

and

$$\frac{d(a; c)u(c; b)}{\overline{du}(a; b)} = \frac{t(a, b_0; c)t(a_0, b; c)}{t(a_0, b_0; c)} \frac{1}{\int_E \frac{t(a, b_0; x)t(a_0, b; x)}{t(a_0, b_0; x)} d\mu(x)} \quad (2.14)$$

$$= \frac{t(a, b_0; c)t(a_0, b; c)}{t(a_0, b_0; c)} \frac{1}{\int_E t(a, b; x) \frac{t(a, b_0; c_0)t(a_0, b; c_0)}{t(a_0, b_0; c_0)t(a, b; c_0)} d\mu(x)} \quad (2.15)$$

$$= \frac{t(a, b_0; c)t(a_0, b; c)t(a_0, b_0; c_0)t(a, b; c_0)}{t(a_0, b_0; c)t(a, b_0; c_0)t(a_0, b; c_0)} \frac{1}{\int_E t(a, b; x) d\mu(x)} \quad (2.16)$$

$$= t(a, b; c). \quad (2.17)$$

In this previous computation, we pass from line (2.14) to line (2.15) and from line (2.16) to line (2.17) by using **Cond** 12.  $\square$

Lemma 2.3.1 says that **Cond** 9 is equivalent to **Cond** 12 for  $\mu$ -positive PCA. Next Lemma 2.3.2, gives some necessary conditions for a  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC to be invariant by a  $\mu$ -positive PCA.

**Lemme 2.3.2.** *Let  $\mathbf{A}$  be a  $\mu$ -positive PCA. If  $\mathbf{A}$  satisfies the conditions of Lemma 2.3.1, then there exists  $H$  a  $\mu$ -positive probability distribution on  $(E, \mathcal{B}(E))$  of  $\mu$ -density  $\eta$  such that the respective  $\mu$ -densities of  $D$  and  $U$  are, for  $\mu^3$ -a.e.  $(a, b, c)$ ,  $d^\eta$  and  $u^\eta$  as defined in Eq (2.5).*

*Proof.* Suppose that, for  $\mu^3$  a.e.  $(a, b, c)$ ,

$$\overline{du}(a; b) = \frac{d(a; c)u(c; b)}{t(a, b; c)} = \frac{d(a; c_0)u(c_0; b)}{t(a, b; c_0)}. \quad (2.18)$$

Then  $d(a; c)u(c; b) = d(a; c_0) \frac{u(c_0; b)}{t(a, b; c_0)} t(a, b; c)$ . Integrating with respect to  $b$ ,

$$d(a; c) = d(a; c_0) \int_E \frac{u(c_0; b)}{t(a, b; c_0)} t(a, b; c) d\mu(b)$$

and, then,

$$u(c; b) = \frac{\frac{u(c_0; b)}{t(a, b; c_0)} t(a, b; c)}{\int_E \frac{u(c_0; x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}. \quad (2.19)$$

**Cond 12** and **Cond 17** permit to replace  $a$  by  $a_0$  on the right side of Eq (2.19). Then, taking  $\eta(b) = u(c_0; b)$  ends the proof.  $\square$

Now, we can end the proof of Theorem 2.1.2.

*Proof of Theorem 2.1.2.* Let  $\mathbf{A}$  be a  $\mu$ -positive PCA. If  $(\rho_0, D, U)$  is an invariant HZMC for  $\mathbf{A}$ , then there exists  $\eta \in L^1(\mu)$  such that Eq (2.5) holds by **Cond 9**, Lemma 2.3.1 and Lemma 2.3.2.

Moreover,  $u$  and  $d$  satisfy **Cond 10**. Hence, rewriting  $\overline{du}$  and  $\overline{ud}$  in terms of  $\eta$ ,

$$\overline{du}(a; b) = \int_E \frac{\frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \frac{\frac{\eta(b)}{t(a_0, b; c_0)} t(a_0, b; c)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; c) d\mu(x)} d\mu(c) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &= \int_E \frac{\frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \frac{\frac{\eta(b)}{t(a, b; c_0)} t(a, b; c)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)} d\mu(c) \quad (2.21) \\ &= \frac{\frac{\eta(b)}{t(a, b; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)}, \end{aligned}$$

we pass from line (2.20) to line (2.21) replacing  $\frac{t(a_0, b; c) t(a_0, x; c_0)}{t(a_0, b; c_0) t(a_0, x; c)}$  by  $\frac{t(a, b; c) t(a, x; c_0)}{t(a, b; c_0) t(a, x; c)}$  using **Cond 12** and **Cond 17**; and

$$\overline{ud}(a; b) = \int_E \frac{\frac{\eta(c)}{t(a_0, c; c_0)} t(a_0, c; a)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; a) d\mu(x)} \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} t(c, x; b) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} d\mu(x)} d\mu(c).$$

Hence,  $\eta$  satisfies Eq (2.7) of **Cond 13**.

Finally, we need a distribution  $\rho_0$  to satisfy **Cond 11** with  $D = D^\eta$ , this is possible only if **Cond 14** holds.

Conversely, if we suppose **Cond 12**, **Cond 13** and **Cond 14**, then all the previous computations hold and then we obtain **Cond 9**, **Cond 10** and **Cond 11** for  $D = D^\eta$ ,  $U = U^\eta$  and  $\rho_0$  and then we conclude using Theorem 2.1.1.  $\square$

### 2.3.3 Proof of Proposition 2.1.10

Let  $\mathbf{A}$  be a PCA and suppose that **Cond 12**, **Cond 15** and **Cond 16** hold. Then, we can replace in **Cond 13** the  $a_0$  by  $c$  using **Cond 12** and **Cond 15**. Then  $\eta$  must verify: for  $\mu$ -a.e.  $a$  and for the  $c_0$  of **Cond 12**,

$$\frac{\frac{\eta(a)}{t(a, a; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} = \int_E \frac{\frac{\eta(c)}{t(c, c; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(c, x; c_0)} d\mu(x)} t(c, c; a) d\mu(c).$$

So, we see that  $\left( a \mapsto \frac{\frac{\eta(a)}{t(a, a; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \right)$  is an eigenfunction of the operator  $\mathcal{A}_1 : f \mapsto \left( \mathcal{A}_1(f) : a \mapsto \int_E f(c) t(c, c; a) d\mu(c) \right)$ . Hence, by Lemma 2.1.12, if there exists a positive eigenfunction  $\nu$  in  $L^1(\mu)$  for  $\mathcal{A}_1$ , it is unique up to a multiplicative constant. Hence, there exists  $\lambda > 0$  such that, for  $\mu$ -a.e.  $a$ ,

$$\frac{\frac{\eta(a)}{t(a, a; c_0)}}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} = \lambda \nu(a),$$

which is equivalent to

$$\eta(a) = \lambda \int_E \eta(x) \frac{t(a, a; c_0)}{t(a, x; c_0)} \nu(a) d\mu(x).$$

Hence,  $\eta$  is an eigenfunction of

$$\mathcal{A}_2 : f \mapsto \left( \mathcal{A}_2(f) : a \mapsto \int_E f(x) \frac{t(a, a; c_0)}{t(a, x; c_0)} \nu(a) d\mu(x) \right).$$

## 2.4 Extension to $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### 2.4.1 PCA on $\mathbb{Z}$

In this section, we extend Theorem 2.1.1 and 2.1.2 to  $\mathbb{Z}$ . The main change is that  $\rho_0$  the initial probability distribution for a HZMC on  $\mathbb{N}$  is replaced on  $\mathbb{Z}$  by a sequence of probability distributions  $R = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  indexed by  $\mathbb{Z}$ .

Let us define a  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  on  $\mathbb{Z}$ . The geometrical structure is now

$$\text{HZ}_{\mathbb{Z}}(t) = \left\{ \left( \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, t + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \right), i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

See Figure 2.2 for a graphical representation. On this structure, a  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  is a Markov chain with two t.k.  $D$  and  $U$  and a family of probability distributions  $R = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  such that

- for all  $i \in \mathbb{Z}$ , the distribution of state  $S(i, t)$  is  $\rho_i$ ,
- the distribution of  $S(i, t+1)$  knowing  $S(i, t)$  is given by  $D$ , and that of  $S(i+1, t)$  knowing  $S(i, t+1)$  is given by  $U$ .

Hence, for any  $i \in \mathbb{Z}$ , the distributions  $\rho_i$ ,  $\rho_{i+1}$ ,  $D$  and  $U$  are constrained such that  $\rho_i D U = \rho_{i+1}$ . In the case of a  $\mu$ -supported  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  (i.e. for all  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_i \ll \mu$  and  $D$  and  $U$  are  $\mu$ -supported t.k.), this gives

$$r_{i+1}(x_{i+1}) = \int_E r_i(x_i) \overline{du}(x_i; x_{i+1}) d\mu(x_i). \quad (2.22)$$

A family of probability distributions  $R$  with this property is said to be compatible with  $(D, U)$ .

As before, we define the support  $\tilde{E} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{supp}(\rho_i)$  of an  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$ . If the  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  is  $\mu$ -supported, then, for  $\mu$ -a.e.  $a \in E$ , there exists  $i$  such that  $r_i(a) > 0$  and, in the case of a  $\mu$ -positive  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  (i.e. for all  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_i$  and  $\mu$  are positive equivalent and  $D$  and  $U$  are  $\mu$ -positive t.k.),  $\tilde{E} = \text{supp}(\mu)$ .

The following theorem is an extension of Theorem 2.1.1 for PCA on  $\mathbb{Z}$ .

**Theorem 2.4.1.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{Z}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -supported PCA and  $(R, D, U)$  a  $\mu$ -supported  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$ . The  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  is invariant by  $\mathbf{A}$  if and only if **Cond 9**, **Cond 10** and the following condition are satisfied:*

**Cond 18:**  $\rho$  is invariant by t.k.  $D$ , i.e. for all  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_i D = \rho_i$ , i.e. for all  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$r_i(c) = \int_E r_i(a) d(a; c) d\mu(a).$$

*Proof.* This is an immediate consequence of Theorem 2.1.1 because we just need, for all  $i \in \mathbb{Z}$ , the  $(\rho_i, D, U)$ -HZMC to be invariant by  $\mathbf{A}$ .  $\square$

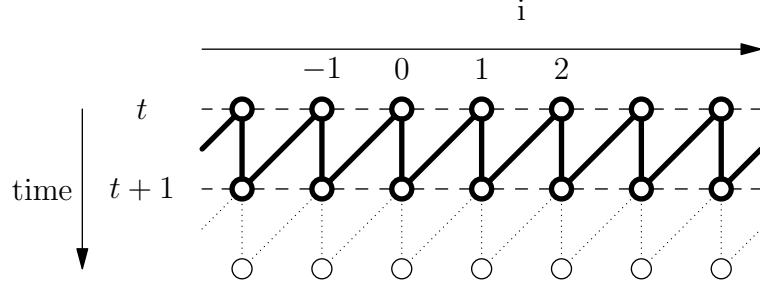


Figure 2.2 – In bold,  $\text{HZ}_{\mathbb{Z}}(t)$ , the  $t$ th horizontal zigzag on  $\mathbb{Z}$  on a space time diagram.

As in Theorem 2.1.2 where we go further for  $\mu$ -positive PCA on  $\mathbb{N}$ , we obtain a necessary and sufficient condition on  $\mu$ -positive PCA to have an invariant  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$ .

**Theorem 2.4.2.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{Z}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -positive PCA.  $\mathbf{A}$  admits a  $\mu$ -positive invariant  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  if and only if **Cond 12**, **Cond 13** and **Cond 14** hold.*

*In this case, the  $(R, D, U)$ - $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$  has for  $\mu$ -densities  $d^n$  and  $u^n$  as defined in Eq (2.5) and, for any  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_i = \rho_0$ .*

*Proof.* It is an immediate consequence of Theorem 2.1.2. The only new thing to verify is that  $R = \rho_0^{\mathbb{Z}}$  is  $(D, U)$  compatible, i.e.  $r_0$  satisfies Eq (2.22) to check that  $(R, D, U)$  defines a  $\text{HZMC}_{\mathbb{Z}}$ . By **Cond 14**, for  $\mu$ -a.e.  $y_i$ ,

$$\int_E r_0(x_i) d(x_i; y_i) d\mu(x_i) = r_0(y_i). \quad (2.23)$$

But, satisfying Eq (2.22) and Eq (2.23) is equivalent to satisfy, for  $\mu$ -a.e.  $x_{i+1}$ ,

$$\int_E r_0(y_i) u(y_i; x_{i+1}) d\mu(y_i) = r_0(x_{i+1}).$$

Now, from Eq (2.23), for  $\mu$ -a.e.  $x_{i+1}$ ,

$$\int \int_{E^2} r_0(x_i) d(x_i; y_i) u(y_i; x_{i+1}) d\mu(x_i) d\mu(y_i) = \int_E r_0(y_i) u(y_i; x_{i+1}) d\mu(y_i).$$

But as  $\overline{du} = \overline{ud}$ ,

$$\int_E \left( \int_E r_0(x_i) u(x_i; y_i) d\mu(x_i) \right) d(y_i; x_{i+1}) d\mu(y_i) = \int_E r_0(y_i) u(y_i; x_{i+1}) d\mu(y_i).$$

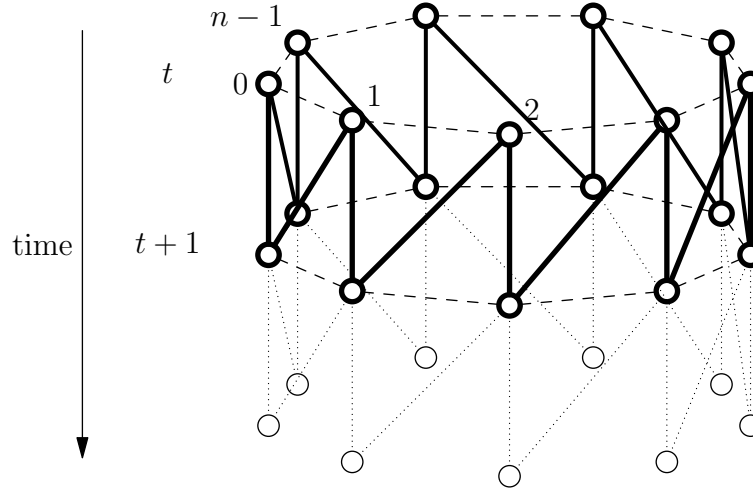


Figure 2.3 – In bold,  $\text{CHZ}(t)$ , the  $t$ th cyclic horizontal zigzag on a space time diagram.

So,  $f : y \rightarrow \int_E r_0(x)u(x; y)d\mu(x)$  is a positive eigenfunction of the integral operator  $\mathcal{A}$  of kernel  $d$ . By Lemma 2.1.12, this eigenfunction is unique (up to a multiplicative constant) equal to  $r_0$ , so  $\int_E r_0(x)u(x; y)d\mu(x) = \lambda r_0(y)$  and  $\lambda = 1$  because they both integrate (with respect to  $\mu$ ) to 1. This ends the proof.  $\square$

Due to the uniqueness of  $\rho_0$  in **Cond** 14 (deduced from Lemma 2.1.12), the  $(R, D, U)$ -HZMC $_{\mathbb{Z}}$  is, in fact, necessarily taken under its invariant probability distribution.

In that case, Prop 2.1.10 still holds and Remark 2.1.8 also holds if  $(\rho_0, D, U)$ -HZMC is replaced by  $(R, D, U)$ -HZMC $_{\mathbb{Z}}$ .

### 2.4.2 PCA on $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

In this section, we have results, similar to Theorems 2.1.1 and 2.1.2, on the lattice  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . The main change is that we characterize PCA whose invariant distribution is a cyclic-HZMC (CHZMC).

Consider, as represented on Figure 2.3,

$$\text{CHZ}(t) = \left\{ \left( \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, t + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \right), i \in \mathbb{Z}/(2n)\mathbb{Z} \right\}.$$



Let  $(D, U)$  be two  $\mu$ -supported t.k. from  $E$  to  $E$  such that

$$Z(D, U) = \int_{E^{2n}} u(y_{n-1}; x_0) d(x_0; y_0) \dots d(x_{n-1}; y_{n-1}) d\mu^{2n}(x_0, y_0, x_1, \dots, y_{n-1}) \notin \{0, +\infty\}.$$

We define the measure  $M$  on CHZ called  $(\mu$ -supported)  $(D, U)$ -CHZMC by its  $\mu^{2n}$ -density  $m$  that is: for  $\mu$ -a.e.  $x_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in E$ ,

$$m(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) = \frac{u(y_{n-1}; x_0) d(x_0; y_0) \dots d(x_{n-1}; y_{n-1})}{Z(D, U)}.$$

For simplicity, we define, formally, only  $\mu$ -supported  $(D, U)$ -CHZMC ( $D$  and  $U$  are  $\mu$ -supported t.k. from  $E$  to  $E$ ).

When  $E$  is finite, a CHZMC is a HZMC conditioned to be periodic. In general, a CHZMC is a Gibbs measure in the cyclic horizontal zigzag (CHZ).

The denomination ‘‘Cyclic Markov chain’’ were introduced, first, by Albenque [Alb09] to define periodic Markov chain on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . This notion is the same as Markovian fields in [BM98].

The distribution of the line  $S_t$  (resp.  $S_{t+1}$ ) is denoted  $M^{(1)}$  (resp.  $M^{(2)}$ ) and its  $\mu^n$ -density is obtained by integration of  $m$  with respect to the  $n$  variables  $y_0, \dots, y_{n-1}$  (resp. to the  $n$  variables  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ). The distribution of the state  $S(i, t)$  is denoted  $M_i^{(1)}$  and its  $\mu$ -density is obtained by integration of  $m$  with respect to the  $2n - 1$  variables  $x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}$ .

For any  $j \in \mathbb{N}$ , for  $\mu$ -a.e.  $a, b$ , we let

$$\overline{(du)^j}(a; b) = \int_{E^{2j-1}} d(a; y_0) u(y_0; x_1) \dots u(y_{j-1}; b) d\mu^{2j-1}(y_0, x_1, \dots, y_{j-1}).$$

We obtain, first, a theorem about  $\mu$ -supported PCA having  $\mu$ -supported CHZMC.

**Theorem 2.4.3.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -supported PCA and  $(D, U)$  a  $\mu$ -supported CHZMC. The  $(D, U)$ -CHZMC is invariant by  $\mathbf{A}$  if and only if the two following conditions are satisfied:*

**Cond 19:** for  $\mu$ -a.e.  $a, b, c \in E$ ,

$$\overline{du}(a; b) t(a, b; c) = d(a; c) u(c; b) \text{ or } \overline{(du)^{n-1}}(b; a) = 0,$$

**Cond 20:** for  $\mu$ -a.e.  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \tilde{E}$ ,

$$\overline{du}(x_0; x_1) \overline{du}(x_1; x_2) \dots \overline{du}(x_{n-1}; x_0) = \overline{ud}(x_0; x_1) \overline{ud}(x_1; x_2) \dots \overline{ud}(x_{n-1}; x_0)$$

*Proof.* Let a  $(D, U)$ -CHZMC be invariant by  $\mathbf{A}$ . For all  $A, B, C \in \mathcal{B}(E)$ , for all  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} & P(S(i, t) \in A, S(i+1, t) \in B, S(i, t+1) \in C) \\ &= \frac{1}{Z(D, U)} \int_{A \times C \times B} d(x_i; y_i) u(y_i; x_{i+1}) \overline{(du)^{n-1}}(x_{i+1}; x_i) d\mu^3(x_i, y_i, x_{i+1}) \\ &= \frac{1}{Z(D, U)} \int_{A \times C \times B} \overline{du}(x_i; x_{i+1}) t(x_i, x_{i+1}; y_i) \overline{(du)^{n-1}}(x_{i+1}; x_i) d\mu^3(x_i, y_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Hence, for  $\mu$ -a.e.  $x_i, y_i, x_{i+1} \in E$ ,

$$\overline{du}(x_i; x_{i+1}) t(x_i, x_{i+1}; y_i) \overline{(du)^{n-1}}(x_{i+1}; x_i) = d(x_i; y_i) u(y_i; x_{i+1}) \overline{(du)^{n-1}}(x_{i+1}; x_i),$$

that is **Cond 19**.

To prove **Cond 20**, we use the fact that the second line of the  $(D, U)$ -CHZMC at time  $t$  is the first line at time  $t+1$  and since the CHZMC is invariant the law of the CHZMC at time  $t$  and at time  $t+1$  is the same  $M$ . But  $M^{(1)}$  is the law of the first line and  $M^{(2)}$  of the second, so  $M^{(1)} = M^{(2)}$ . In terms of  $\mu^n$ -densities,  $m^{(1)} = m^{(2)}$ . But,  $m^{(1)}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{Z(D, U)} \overline{du}(x_0; x_1) \dots \overline{du}(x_{n-1}; x_0)$  and  $m^{(2)}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{Z(D, U)} \overline{ud}(x_0; x_1) \dots \overline{ud}(x_{n-1}; x_0)$  that gives **Cond 20**.

Conversely, we suppose that **Cond 19** and **20** are satisfied. Then, the push forward measure of the  $(D, U)$ -CHZMC by  $\mathbf{A}$  is also the  $(D, U)$ -CHZMC (the computation is an adaptation of that done in the Proof of Theorem 2.1.1 in Section 2.3.1 to compute the push forward measure of a HZMC).  $\square$

For  $\mu$ -positive PCA, **Cond 19** could be exploited a little more.

**Theorem 2.4.4.** *Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on  $E$ . Let  $\mathbf{A} := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E, N, T)$  be a  $\mu$ -positive PCA.  $\mathbf{A}$  admits a  $\mu$ -positive invariant CHZMC if and only if **Cond 12** and*

**Cond 21:** *there exists a positive function  $\eta \in L^1(\mu)$  solution of: for  $\mu$ -a.e.  $x_0, \dots, x_{n-1} \in E$ ,*

$$\begin{aligned} & \overline{d^\eta u^\eta}(x_0; x_1) \overline{d^\eta u^\eta}(x_1; x_2) \dots \overline{d^\eta u^\eta}(x_{n-1}; x_0) \\ &= \overline{u^\eta d^\eta}(x_0; x_1) \overline{u^\eta d^\eta}(x_1; x_2) \dots \overline{u^\eta d^\eta}(x_{n-1}; x_0) \end{aligned}$$

with  $d^\eta$  and  $u^\eta$  as defined in Eq (2.5).

In this case, the  $(D, U)$ -CHZMC has for  $\mu$ -densities  $d^\eta$  and  $u^\eta$  as defined in Eq (2.5).

*Proof.* First of all, when a PCA is  $\mu$ -positive, **Cond** 19 can be rewritten, for  $\mu$ -a.e.  $a, b, c$ ,  $t(a, b; c) = \frac{d(a; c)u(c; b)}{\overline{du}(a; b)}$  because both  $\overline{du}(a; b)$  and  $\overline{(du)^{n-1}}(b; a)$  are positive.

Hence, we use Lemma 2.3.1 to prove that **Cond** 19 is equivalent to **Cond** 12. Moreover, Lemma 2.3.2 still applies and the state space of possible solutions for  $(D, U)$  is parametrized by  $\eta$  a function in  $L^1(\mu)$ . **Cond** 20 applied on  $d^\eta$  and  $u^\eta$  gives **Cond** 21.  $\square$

## Chapitre 3

### ACP et “vertex-models”

Ce chapitre présente les premiers résultats de travaux qui sont encore en cours.

### 3.1 Introduction

#### Les modèles classiques à sommets

Les modèles à sommets sont des modèles classiques de la physique statistique pour modéliser le comportement de la glace en deux dimensions. Historiquement, le premier de ces modèles fut le modèle à 6 sommets introduit par Pauling en 1935 [Pau35].

Considérons  $K_N$  le graphe dont l'ensemble des sommets est

$$\{(i, j) : -1 \leq i, j \leq N + 1\}$$

et dont l'ensemble des arêtes est

$$\begin{aligned} & \{((i, j), (i, j + 1)) : 0 \leq i \leq N, -1 \leq j \leq N\} \\ & \cup \{((i, j), (i + 1, j)) : -1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N\} \end{aligned}$$

(voir Figure 3.1). Les sommets

$$\{(i, j) : 0 \leq i, j \leq N\}$$

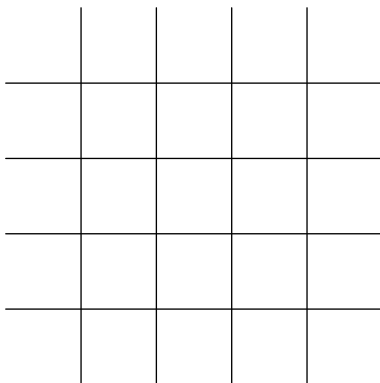
sont appelés sommets internes de  $K_N$  (ce sont ceux adjacents à 4 arêtes de  $K_N$ ). Les arêtes

$$\begin{aligned} & \{((-1, j), (0, j)) : 0 \leq j \leq N\} \cup \{((N, j), (N + 1, j)) : 0 \leq j \leq N\} \\ & \cup \{((i, -1), (i, 0)) : 0 \leq i \leq N\} \cup \{((i, N), (i, N + 1)) : 0 \leq i \leq N\} \end{aligned}$$

sont appelées arêtes externes. Ce graphe possède  $2N^2 + 2N$  arêtes que l'on peut classer en deux groupes : les  $4N$  arêtes sur le bord appelées aussi arêtes externes et les  $2N^2 - 2N$  arêtes internes. Chacune de ces  $2N^2 + 2N$  arêtes est orientable suivant deux orientations : soit “de bas en haut” ou “de haut en bas” si l'arête est verticale, soit “de gauche à droite” ou “de droite à gauche” si l'arête est horizontale. On appelle *orientation de  $K_N$* , le graphe  $K_N$  muni d'une orientation pour chacune de ces arêtes. À  $N$  fixé, il existe un nombre fini  $2^{2N^2+2N}$  d'orientations de  $K_N$ . L'ensemble des orientations de  $K_N$  est noté  $\Omega_N$ .

Dans la suite, on désigne par sommets de  $K_N$  uniquement les seuls sommets internes de  $K_N$ .

Dans le modèle à 6 sommets, on considère uniquement le sous-ensemble  $\Omega_{6V,N}$  des orientations de  $K_N$  de sorte qu'en tout sommet de  $K_N$ , il y ait exactement deux arêtes entrantes et deux arêtes sortantes. Ainsi, autour de chaque sommet de

FIGURE 3.1 –  $K_4$ .

$K_N$  les 4 arêtes adjacentes à ce sommet sont dans une des 6 configurations locales présentées en Figure 3.2. À chaque configuration locale ( $i$ ) est associée un poids  $w_i$ . On dit qu'un sommet est de type  $i$  si les 4 arêtes qui lui sont adjacentes sont dans la configuration locale ( $i$ ) de la Figure 3.2. À partir des poids locaux  $w_i$ , on munit l'espace des orientations  $\Omega_{6V,N}$  d'un système de poids  $W$  de type Boltzmanien : le poids  $W(O)$  d'une orientation  $O$  de  $K_N$  étant :

$$W(O) = \prod_{i=1}^6 w_i^{n_i(O)} \quad (3.1)$$

où  $n_i(O)$  est le nombre de sommets de type  $i$  dans l'orientation  $O$ . À la mesure  $W$  sur  $\Omega_{6V,N}$ , on associe comme habituellement la mesure de probabilité  $P_W$  sur  $\Omega_{6V,N}$  définie par

$$P_W(O) = W(O)/Z_N \text{ où } Z_N = \sum_{O' \in \Omega_{6V,N}} W(O').$$

La valeur  $Z_N$  est appelée fonction de partition. Sous cette probabilité  $P_W$ , la probabilité d'une orientation  $O$  est bien sûr proportionnelle à son poids  $W(O)$ .

Pour des raisons de symétrie liées à  $K_N$ , le nombre de sommets de type 5 et 6 dans une configuration admissible diffère d'au plus  $N$  ( $|n_5 - n_6| \leq N$ ) ce qui permet de choisir  $w_5 = w_6 = c$  sans perte de généralité pour l'asymptotique (dans l'asymptotique, ce qui nous intéresse ce sont les noeuds de type  $i$  où  $n_i = \Theta(N^2)$ ). En l'absence de champs extérieur (hypothèse classique pour une première approche d'un modèle de physique statistique), on obtient également  $w_1 = w_2 = a$  et  $w_3 = w_4 = b$ . Dans ce cas, Baxter en 1972 a calculé la fonction de partition  $Z$  du modèle à 6 sommets [Bax72] et en a déduit que le modèle à 6 sommets avait des propriétés très

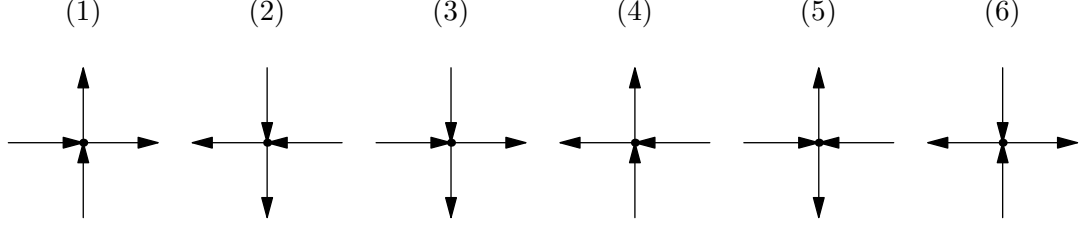


FIGURE 3.2 – Les 6 types de sommets possibles du 6-vertex model.

différentes quand  $N \rightarrow \infty$  suivant les valeurs des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Un *état stable* du modèle à 6 sommets désigne un sous-espace (de mesure non nulle) de l'ensemble des paramètres  $(a, b, c)$  pour lequel les propriétés asymptotiques (quand  $N \rightarrow \infty$ ) du modèle à 6 sommets sont les mêmes dans ce sous-espace<sup>a</sup>. Le modèle à 6 sommets a 4 états stables [Bax82, Section 8.10] (voir Figure 3.3) :

- Si  $a > b + c$  (état I), alors on a un état ferromagnétique, dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 1, soit de type 2 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $b > a + c$  (état II), alors on a encore un état ferromagnétique, mais dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 3, soit de type 4 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $c > a + b$  (état IV), alors on a un état anti-ferromagnétique,  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 5 et  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 6 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Sinon (i.e. si  $a, b, c < (a + b + c)/2$ ) (état III), alors on a un état désordonné, il y a  $\Theta(N^2)$  sommets de chaque type p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .

Jusque là, on a considéré le modèle à 6 sommets sur  $K_N$  avec toutes les orientations  $\Omega_{6V,N}$  possibles aussi appelé modèle à 6 sommets avec des conditions de bord libre car les arêtes externes de  $K_N$  (arêtes en rouge sur la Figure 3.4) ne vérifiaient aucune contrainte. Dans d'autres cas, on considère le modèle à 6 sommets sur  $K_N$  en restreignant l'ensemble des orientations à un sous-ensemble de  $\Omega_{6V,N}$  qui vérifie une contrainte portant sur l'orientation des arêtes externes de  $K_N$ . Quelques exemples classiques de conditions de bord, en reprenant la dénomination dans [BKW73], sont :

- condition de bord libre (FBC) : aucune condition sur les arêtes externes ;
- condition de bord périodique (PBC) : les deux arêtes externes d'une même ligne ou d'une même colonne sont orientées dans le même sens ;
- condition de bord “wall” (voir [ZJ00]) : toutes les arêtes externes des lignes sont dirigées vers l'intérieur et celles des colonnes vers l'extérieur (voir Figure 3.4) ;

<sup>a</sup>. Illustrons la notion d'états stables avec un peu de physique : l'eau à la pression atmosphérique a 3 états stables suivant la valeur de la température  $T$  : la glace quand  $T < 0^\circ\text{C}$ , l'eau liquide quand  $0^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$  et la vapeur d'eau quand  $T > 100^\circ\text{C}$ .

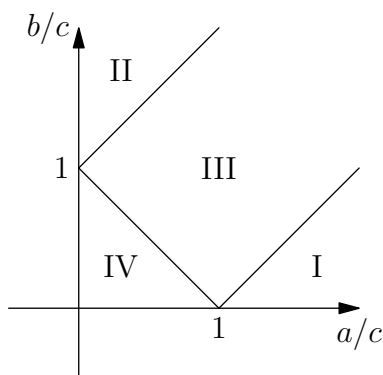
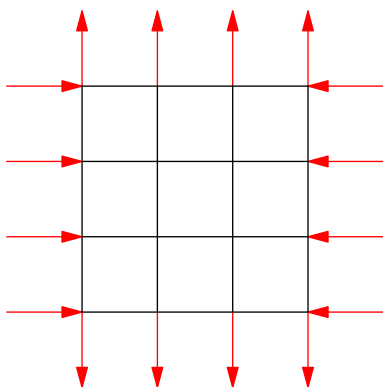


FIGURE 3.3 – Le diagramme des 4 états macroscopiques du 6-vertex model.

FIGURE 3.4 –  $K_4$  et une orientation façon “wall” de ces 16 arêtes externes (en rouge).

— condition de bord arbitraire (SBC) : l’orientation est imposée pour chacune des arêtes (“wall” en est un exemple).

Dans ce chapitre, on considérera des conditions de bord particulières appelées ici conditions de bord semi-libres (SL), qui sont des conditions de nature probabiliste : les orientations des arêtes externes situées à gauche ou en haut forment une famille i.d.d. de loi commune suivante : chaque arête est orientée vers l’extérieur ( $\leftarrow$  ou  $\uparrow$ ) avec probabilité  $q$  et avec probabilité  $1 - q$  vers l’intérieur ( $\rightarrow$  ou  $\downarrow$ ) ; l’orientation des arêtes externes situées à droite et en bas est libre.

Un des principaux “défauts” du modèles à 6 sommets est qu’il est très dépendant des conditions de bords [BKW73]. Par exemple, en imposant les conditions de bords de la Figure 3.5, on a une unique orientation possible de  $K_N$ . Il existe d’autres modèles de sommets moins sensibles à ces conditions de bords. En particulier, le



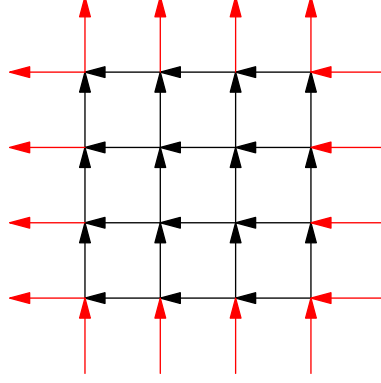


FIGURE 3.5 – L’unique configuration du modèle à 6 sommets avec comme condition de bords : toutes les arêtes externes des côtés gauche et haut sont orientées vers l’intérieur et toutes les arêtes externes des côtés droit et bas sont orientées vers l’extérieur.

modèle à 8 sommets ne possède pas cette sensibilité [BKW73].

Dans le modèle à 8 sommets, la contrainte est qu’en chaque sommet il y ait 0, 2 ou 4 arêtes entrantes sur les 4 arêtes adjacentes. Ainsi, les 2 configurations de la Figure 3.6 s’ajoutent aux 6 configurations de la Figure 3.2 pour un total de 8 configurations possibles des 4 arêtes adjacentes d’un sommet. Pour des raisons de symétrie (imposées par le modèle), le nombre de sommets de type 7 et 8 dans une configuration admissible de ce modèle vont différer d’au plus  $2N$  ( $|n_7 - n_8| \leq 2N$ ) ce qui permet de choisir  $w_7 = w_8 = d$  sans perte de généralité pour l’asymptotique (dans l’asymptotique, ce qui nous intéresse ce sont les noeuds de type  $i$  où  $n_i = \Theta(N^2)$ ). Là encore la fonction de partition  $Z$  de ce modèle est bien connue grâce à Baxter [Bax82, Section 10] et permet d’identifier 5 états stables pour le modèle à 8 sommets [Bax82, Section 10.11] :

- Si  $a > b + c + d$  (état I), alors on a un état ferromagnétique dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 1, soit de type 2 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $b > a + c + d$  (état II), alors on a encore un état ferromagnétique dans lequel  $N^2 - o(N^2)$  sommets sont soit de type 3, soit de type 4 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $c > a + b + d$  (état IV), alors on a un état anti-ferromagnétique dans lequel  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 5 et  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 6 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Si  $d > a + b + c$  (état V), alors on a un état anti-ferromagnétique dans lequel  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 7 et  $N^2/2 - o(N^2)$  sommets sont de type 8 p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Sinon (i.e. si  $a, b, c, d < (a + b + c + d)/2$ ) (état III), alors on a un état désordonné, il y a  $\Theta(N^2)$  sommets de chaque type p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ .

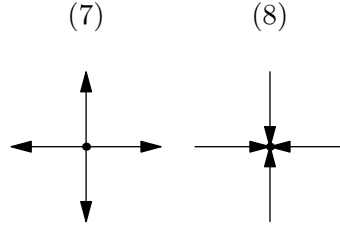


FIGURE 3.6 – Les 2 types supplémentaires pour le modèle à 8 sommets.

Là encore, ce résultat est valable lorsque les conditions de bords sont libres. Mais comme avant, on peut étudier ce modèle sous différentes conditions de bords. Nous l'étudierons avec des conditions de bords semi-libres (SL).

Nous avons ici présenté les modèles à 6 et 8 sommets sur le graphe  $K_N$ , graphe sur lequel il est le plus couramment étudié. Dans la suite, nous les considérons sur un autre graphe  $\overline{K_N}$ . Le graphe  $\overline{K_N}$  a pour ensemble de sommets

$$\{(i, t) : 0 \leq i, t \leq N - 1\} \cup \{(i - 1/2, t - 1/2) : 0 \leq i, t \leq N\}$$

et pour ensemble d'arêtes

$$\begin{aligned} &\{((i - 1/2, t - 1/2), (i, t)), ((i - 1/2, t + 1/2), (i, t)), \\ &((i + 1/2, t - 1/2), (i, t)), ((i + 1/2, t + 1/2), (i, t)) : 0 \leq i, t \leq N - 1\} \end{aligned}$$

(voir Figure 3.7). On distingue deux types de sommets : les sommets centraux de degré 4 (appelés par la suite sommets) et les sommets périphériques de degré 1 ou 2 (qui vont servir à définir des conditions de bord).

Là encore, nous considérons les modèles à 6 et 8 sommets sur  $\overline{K_N}$  avec une condition de bord qui est de nature probabiliste : les orientations des arêtes  $\{((i - 1/2, -1/2), (i, 0)) : 0 \leq i \leq N - 1\}$  forment une famille i.i.d. (pour l'orientation haut/bas) de loi commune suivante : chaque arête est orientée vers le haut ( $\nearrow$  ou  $\nwarrow$ ) avec probabilité  $q$  et vers le bas ( $\swarrow$  ou  $\searrow$ ) avec probabilité  $1 - q$  ; les orientations des arêtes situées sur les 3 autres bords externes (gauche, bas et droit) sont libres. Nous appelons cette condition de bord condition de bord trois-quart-libre de paramètre  $q$  (cette condition sera notée  $QL(q)$ ). Le but du chapitre est de regarder les propriétés des modèles à 6 et 8 sommets sur le graphe  $\overline{K_N}$  dans la limite thermodynamique (quand  $N \rightarrow \infty$ ).

On définit maintenant le graphe  $\overline{K_\infty}$  à l'aide des points du demi-plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  et une condition de bord sur ce graphe qui apparaîtront par la suite comme étant la limite (dans un sens que nous préciserons) quand  $N \rightarrow \infty$  de la suite des graphes

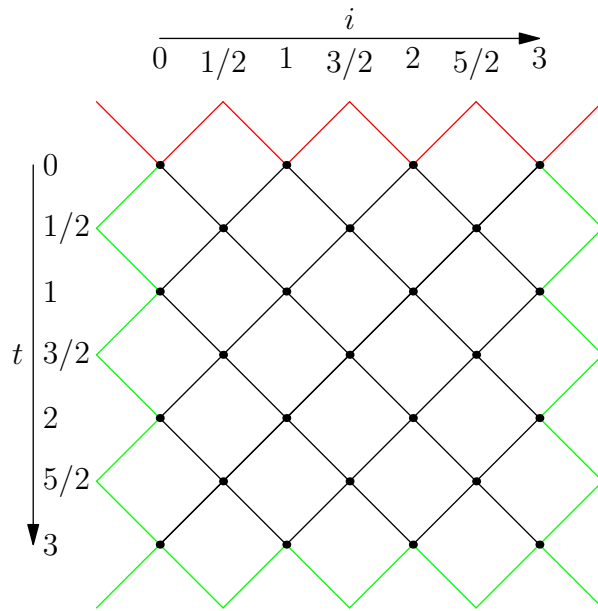


FIGURE 3.7 – Le graphe  $\overline{K}_4$ . Les axes : la numérotation des sommets. Les conditions de bord : les arêtes rouges sont i.i.d. (pour l’orientation haut/bas) et les arêtes vertes sont libres.

$\overline{K}_N$  avec condition de bord QL. Le graphe  $\overline{K}_\infty$  a pour ensemble de sommets

$$\{(i, t) : i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}\} \cup \{(i - 1/2, t - 1/2) : i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}\}$$

et pour ensemble d'arêtes

$$\begin{aligned} &\{((i - 1/2, t - 1/2), (i, t)), ((i - 1/2, t + 1/2), (i, t)), \\ &((i + 1/2, t - 1/2), (i, t)), ((i + 1/2, t + 1/2), (i, t)) : i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(voir Figure 3.8). Il y a alors deux types de sommets : les sommets centraux de degré 4 (appelés par la suite sommets) et les sommets surfaciques  $\{(i - 1/2, -1/2) : i \in \mathbb{Z}\}$  de degré 2 (qui vont servir à définir des conditions de bord). Les arêtes sont également numérotées : l'arête de  $\overline{K}_\infty$  qui relie les sommets  $(i, t)$  et  $(i', t')$  est numérotée par  $(2 \max(i, i'), 2 \max(t, t'))$ .

Quand on considère une orientation  $O$  de  $\overline{K}_\infty$ , on désigne par  $o(i, t) \in \{\nearrow, \searrow\}$  ou  $\{\swarrow, \nwarrow\}$  (selon si l'arête  $(i, t)$  est parallèle ou perpendiculaire à la première bissectrice) l'orientation de l'arête  $(i, t)$ . Sur ce graphe, on appelle condition de bord  $UI(q)$  la condition de bord qui impose que les orientations des arêtes de la première ligne  $(o(i, 0) : i \in \mathbb{Z})$  sont indépendantes et qu'avec probabilité  $q$  une arête est orientée vers le haut ( $\nearrow$  ou  $\nwarrow$ ) et  $1 - q$  vers le bas ( $\swarrow$  ou  $\searrow$ ).

**Fonction de corrélation du modèle à 6 sommets quand  $b = a + c$  et du modèle à 8 sommets quand  $b + d = a + c$ .**

Soit  $\overline{\Omega}_\infty$  l'ensemble des orientations de  $\overline{K}_\infty$ . On munit  $\overline{\Omega}_\infty$  de la loi de probabilité  $\overline{P}_\infty$  associée au modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_N$  avec condition de bord  $UI(q)$ . Dans le cas général ( $a, b$  et  $c$  quelconques), il faut construire cette loi comme la limite en  $N$  en un certain sens des lois de probabilité  $\overline{P}_N$  associées aux modèles à 6 sommets sur les graphes  $\overline{K}_N$  avec condition de bord  $QL(q)$ . Dans le cas  $b = a + c$ , nous verrons plus tard qu'il y a un moyen plus simple de la réaliser en considérant la loi  $\mathcal{L}(q; p, 1)$  (voir Définition 3.1.4).

On considère une orientation  $O \in \overline{\Omega}_\infty$  prise sous la loi  $\overline{P}_\infty$ . La fonction de corrélation des arêtes du modèle à 6 sommets est la fonction  $C((i, t); (i', t'))$  définie, pour tout  $i, i', t, t'$ , par

$$C((i, t); (i', t')) = E[e(i, t)e(i', t')] - E[e(i, t)]E[e(i', t')]$$

avec, pour tout  $i, t$ ,

$$e(i, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } o(i, t) = \nearrow \text{ ou } \nwarrow \\ 0 & \text{si } o(i, t) = \swarrow \text{ ou } \searrow \end{cases}.$$

Autrement dit, si l'arête  $(i, t)$  est orientée vers le haut alors  $e(i, t) = 1$ , sinon  $e(i, t) = 0$ . Sous les conditions particulières que l'on prend,  $C$  a la propriété suivante :

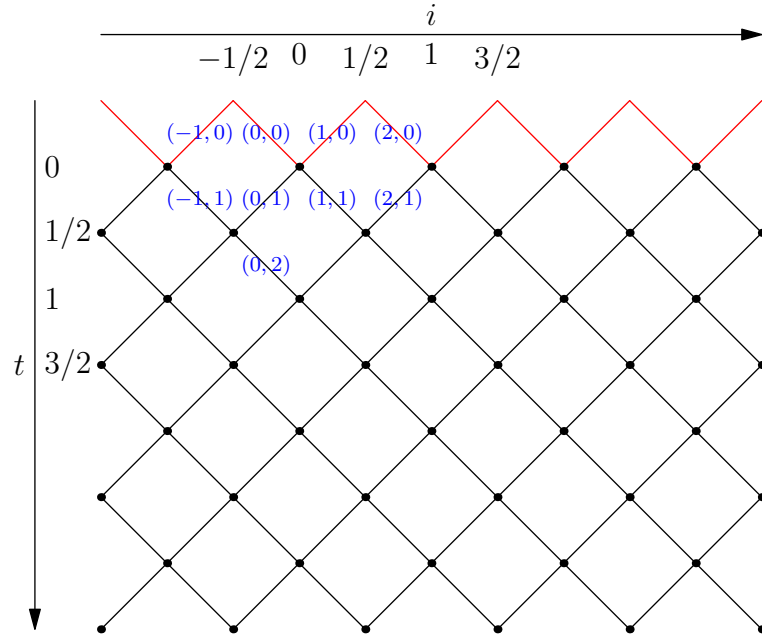


FIGURE 3.8 – Le graphe  $\overline{K}_\infty$ . Les axes : la numérotation des sommets. En bleu : la numérotation des arêtes. La condition de bord UI : les orientations des arêtes rouges (les arêtes  $(i, 0)$  avec  $i \in \mathbb{N}$ ) sont i.i.d. (pour l’orientation haut/bas)

**Proposition 3.1.1** (Résultat de [KDN90]). *Pour une orientation aléatoire  $O$  de  $\overline{K}_\infty$  distribuée selon la loi  $\overline{P}_\infty$  associée au modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $UI(q)$  et  $b = a + c$ , on a, pour tout  $i, i', t, t'$ ,*

$$C((0, t); (i', t')) = C((1, t); (1 - i', t')), \quad (3.2)$$

$$C((i, t); (i', t')) = C((i + 2, t); (i' + 2, t')), \quad (3.3)$$

$$C((i, t); (i', t')) = C((i + 1, t + 1); (i' + 1, t' + 1)). \quad (3.4)$$

Cette proposition est une conséquence du Corollaire 3.1.14 que nous verrons un peu plus loin. Ces propriétés nous permettent de n'avoir à calculer que  $C((0, 0); (i, t))$  pour tout  $(i, t)$  pour connaître la fonction  $C$ . Afin d'alléger les notations, nous notons  $C(i, t) = C((0, 0); (i, t))$ . Cette fonction de corrélation a été calculée par Kandel, Domany et Nienhuis [KDN90] pour le modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec  $b = a + c$  et pour toutes conditions de bord  $UI(q)$  :

**Théorème 3.1.2** ([KDN90]). *Pour tout  $q \in [0, 1]$ , dans le modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $UI(q)$  et avec  $b = a + c$ , la fonction de corrélation  $C(i, t)$  vaut*

$$C(i, 2t) = \begin{cases} \frac{q(1-q)}{2^{2t}} \binom{2t-1}{(2t-i-\Delta(i))/2} & \text{si } 2t \geq i + \Delta(i), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{avec } \Delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ 2 & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Dans leur article, ils considèrent deux lignes à la fois, c'est cela qui explique le calcul de  $C(i, 2t)$  plutôt que de  $C(i, t)$ .

Nous allons, dans cette partie, calculer la fonction de corrélation  $C(i, t)$  du modèle à 8 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $UI(1/2)$  et avec  $b + d = a + c$ . La fonction de corrélation  $C$  vérifie encore les Équations (3.2), (3.3) et (3.4). Dans ce résultat préparatoire, nous exprimons la fonction de corrélation  $C(i, t)$  dans le modèle à 8 sommets comme un des coefficients du développement en série d'une fraction rationnelle à 2 variables.

**Théorème 3.1.3.** *Dans le modèle à 8 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $UI(1/2)$  et avec  $b + d = a + c$ , la fonction de corrélation  $C(i, t)$  est le coefficient en  $l^t x^{i+t}$  dans le développement en séries selon  $l$  et  $x$  de la fraction rationnelle :*

$$\frac{1 + l(1 - (p + r) + x(r - p))}{x^2 l^2 (2p - 1)(2r - 1) + l(1 - (p + r))(1 + x^2) + 1} \quad (3.5)$$

$$\text{avec } p = \frac{a}{a + c} \text{ et } r = \frac{b}{b + d}.$$

En particulier, si  $(i \geq 0 \text{ et } t \leq i - 1)$  ou  $(i \leq -1 \text{ et } t \leq -i)$ , alors  $C(i, t) = 0$ .

En particulier, si,  $a = d$  et  $b = c$ , alors  $C(i, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ (1 - 2p)^t & \text{si } i = 0. \end{cases}$

Pour obtenir le Théorème 3.1.2, Kandel, Domany et Nienhuis définissent une orientation aléatoire  $O$  de  $\overline{K}_\infty$  ligne à ligne. Cette orientation  $O$  suit la loi  $\overline{P}_\infty$  du modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $\text{UI}(q)$  et avec  $b = a + c$ . Nous généralisons un peu leur idée afin de définir les lois  $\mathcal{L}(q; p, r)$  sur l'ensemble des orientations  $\overline{\Omega}_\infty$  de  $\overline{K}_\infty$  :

**Définition 3.1.4** (La loi  $\mathcal{L}(q; p, r)$ ). Soit  $q, p, r \in [0, 1]$ , on définit la loi  $\mathcal{L}(q; p, r)$  sur  $\overline{\Omega}_\infty$  les orientation du demi plan  $\overline{K}_\infty$  par :

- Les arêtes de la première ligne ( $t = 0$ ) sont orientées de manière indépendante avec pour probabilité d'être orientée vers le haut ( $\nearrow$  ou  $\nwarrow$  suivant la direction de l'arête) avec probabilité  $q$  et vers le bas ( $\swarrow$  ou  $\searrow$ ) avec probabilité  $1 - q$ , i.e., pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} P(o(2i, 0) = \nwarrow) &= P(o(2i + 1, 0) = \nearrow) = q, \\ P(o(2i, 0) = \swarrow) &= P(o(2i + 1, 0) = \searrow) = 1 - q. \end{aligned}$$

Autrement dit, on respecte la condition de bord  $\text{UI}(q)$ .

- Pour  $t$  pair, l'orientation de la ligne  $t + 1$  à partir de la ligne  $t$  est obtenue de la façon suivante : pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , si les arêtes  $(2i, t)$  et  $(2i + 1, t)$  ont la même orientation haut/bas, alors les arêtes  $(2i, t + 1)$  et  $(2i + 1, t + 1)$  ont encore la même orientation avec probabilité  $r$  et avec probabilité  $1 - r$  les arêtes  $(2i, t + 1)$  et  $(2i + 1, t + 1)$  sont toutes deux orientées différemment des arêtes  $(2i, t)$  et  $(2i + 1, t)$ , i.e. pour tout  $t$  pair et tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) &= (\swarrow, \searrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\nwarrow, \nearrow)) = r, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) &= (\nearrow, \nwarrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\swarrow, \swarrow)) = 1 - r, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) &= (\nearrow, \nwarrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\nwarrow, \nearrow)) = r, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) &= (\swarrow, \searrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\nwarrow, \nearrow)) = 1 - r. \end{aligned}$$

si les deux arêtes  $(2i, t)$  et  $(2i + 1, t)$  sont d'orientations haut/bas différentes, alors, avec probabilité  $p$ ,  $(2i, t + 1)$  a même orientation que  $(2i + 1, t)$  et  $(2i + 1, t + 1)$  que  $(2i, t)$  et, avec probabilité  $1 - p$ , c'est l'inverse :  $(2i, t + 1)$  est orientée (selon l'orientation haut/bas) comme  $(2i, t)$  et  $(2i + 1, t + 1)$  comme

$(2i + 1, t)$ , i.e.

$$\begin{aligned} P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) = (\nearrow, \searrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\searrow, \nearrow)) &= p, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) = (\nearrow, \searrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\nwarrow, \swarrow)) &= 1 - p, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) = (\swarrow, \nwarrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\nwarrow, \swarrow)) &= p, \\ P((o(2i, t + 1), o(2i + 1, t + 1)) = (\swarrow, \nwarrow) | (o(2i, t), o(2i + 1, t)) = (\searrow, \nearrow)) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Ces choix d'orientations sont simultanés et indépendants. On note  $T^e$  cet opérateur qui permet de passer d'une orientation de la ligne à une autre orientation aléatoire de la ligne.

- Pour  $t$  impair, idem que pour  $t$  pair à la différence près que l'on considère les couples d'arêtes d'abscisses  $(2i - 1, 2i)$  au lieu des couples d'arêtes d'abscisses  $(2i, 2i + 1)$ . On note  $T^i$  cet opérateur qui permet de passer d'une orientation de la ligne à une autre orientation aléatoire de la ligne.

En prenant  $r = 1$ , on retrouve l'idée originale de [KDN90]. La loi  $\mathcal{L}\left(q; \frac{a}{a+c}, 1\right)$  est la loi  $\bar{P}_\infty$  du modèle à 6 sommets sur  $\bar{K}_\infty$  avec condition de bord  $\text{UI}(q)$  et  $b = a + c$  [KDN90]. La loi  $\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}; \frac{a}{a+c}, \frac{b}{b+d}\right)$  est la loi  $\bar{P}_\infty$  (sur  $\bar{\Omega}_\infty$ , l'espace des orientations de  $\bar{K}_\infty$ ) associée au modèle à 8 sommets avec condition de bord  $\text{UI}(1/2)$  et  $b + d = a + c$ . C'est grâce à cette loi que l'on démontre le Théorème 3.1.3 dans la Section 3.3.

### Condition de bord $\text{UI}(q)$ et ACP triangulaire

Nous allons montrer maintenant que les conditions de bord de type  $\text{UI}(q)$  ont une propriété remarquable dans nos modèles : en effet pour le modèle à 6 sommets sur  $\bar{K}_\infty$  avec condition de bord  $\text{UI}(q)$  et avec  $b = a + c$ , la loi des orientations haut/bas de la première ligne est aussi la loi des orientations haut/bas des arêtes  $((i, t) : i \in \mathbb{Z})$  de la ligne d'ordonnée  $t$  pour tout  $t$ . Pour ce faire, nous allons faire le lien entre les modèles à 6 et à 8 sommets et des ACP d'ordre 2 que nous appelons ACP triangulaires.

Définissons d'abord ce qu'est un ACP d'ordre 2. Un ACP  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 est un quintuplet  $(E, \mathbb{L}, N_1, N_2, T)$  où  $E$  est un alphabet fini,  $\mathbb{L}$  un réseau,  $N_1$  une fonction de voisinage sur le réseau  $\mathbb{L}$ ,  $N_2$  une autre fonction de voisinage sur le réseau  $\mathbb{L}$  et  $T$  une matrice de transition de  $E^{|N_1|} \times E^{|N_2|}$  dans  $E$ . À partir de ce quintuplet, on construit une chaîne de Markov  $(S_t : t \geq 0)$  d'ordre 2 à valeurs dans  $E^\mathbb{L}$  de la façon



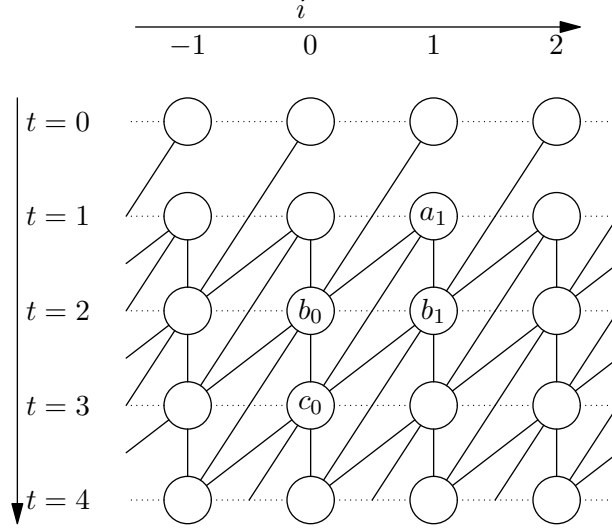


FIGURE 3.9 – Diagramme espace-temps (vide) d'un ACP triangulaire

suivante : pour tout sous-ensemble  $C \subset \mathbb{L}$ , pour tout  $(c_i : i \in C) \in E^C$ ,

$$\begin{aligned} P((S_{t+2}(i) = c_i : i \in C) | S_t = (a_i : i \in \mathbb{L}), S_{t+1} = (b_i : i \in \mathbb{L})) \\ = \prod_{i \in C} T((a_j : j \in N_1(i)), (b_{j'} : j' \in N_2(i)); c_i). \end{aligned}$$

De ces ACP, nous ne traiterons que des cas où  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$ ,  $N_1(i) = (i+1)$  et  $N_2(i) = (i, i+1)$  et nous les appelons ACP triangulaires du fait que leur diagramme espace-temps est le réseau triangulaire (voir Figure 3.9). Dans un souci de lisibilité par rapport à ce dernier, la transition  $T((a_{i+1}), (b_i, b_{i+1}); c_i)$  d'un ACP triangulaire est notée  $T(b_i, a_i, b_{i+1}; c_i)$ .

Juste avant de voir comment les ACP triangulaires et les modèles à 6 et 8 sommets sont liés, nous présentons deux théorèmes qui caractérisent les ACP triangulaires dont une des lois invariantes est une  $(D, U)$ -HZMC (voir Section 1.1.2). Pour l'instant, cette caractérisation n'a été établie que dans deux cas particuliers. Le premier est quand  $D = U$  :

**Théorème 3.1.5.** *Soit  $T(a, b, c; d)$  la matrice de transition d'un ACP triangulaire à alphabet  $E$  fini à taux positif ( $T(a, b, c; d) > 0$  pour tout  $a, b, c, d$ ). Pour tout  $a, c \in E$ , on note  $(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E)$  le vecteur propre à gauche (associé à la valeur propre 1) de  $(T(a, b, c; d))_{b,d}$ . L'ACP triangulaire de matrice de transition  $T$  admet comme loi*

invariante une  $(D, D)$ -HZMC ssi  $\tilde{T}(a, c; \cdot)$  vérifie les conditions du Théorème 1.2.2 avec  $D^\eta = U^\eta$ . Dans ce cas, la  $(D, D)$ -HZMC invariante a pour noyaux  $(D^\eta, D^\eta)$ .

Le second cas est quand l'alphabet  $E$  est de taille 2 :

**Théorème 3.1.6.** Soit  $T(a, b, c; d)$  la matrice de transition d'un ACP triangulaire à alphabet  $E = \{0, 1\}$  à taux positif. Pour tout  $a, c$ , on note  $\left(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E\right)$  le vecteur propre à gauche (associé à la valeur propre 1) de  $(\sum_d T(c, b, a; d)T(a, d, c; e))_{b,e}$ . L'ACP triangulaire de matrice de transition  $T$  possède une HZMC comme loi invariante ssi  $\tilde{T}$  vérifie **Cond 3** et

**Cond 22:** pour le couple  $(D^\eta, U^\eta)$  trouvé en appliquant le Théorème 1.2.2 à  $\tilde{T}$ , on a pour tout  $a, c, d \in \{0, 1\}$

$$D^\eta(a; d)U^\eta(d; c) = \sum_{b=0}^1 U^\eta(c; b)D^\eta(b; a)T(a, b, c; d).$$

Dans ce cas, la HZMC invariante a pour noyaux  $(D^\eta, U^\eta)$ .

Nous allons maintenant considérer deux ACP triangulaires particuliers. Le premier est en lien avec le modèle à 8 sommets et le second avec le modèle à 6 sommets.

**Exemple 3.1.7.** Soit l'ACP triangulaire  $\mathbf{A}_8$  avec alphabet  $E = \{0, 1\}$  et avec matrice de transition  $T$  tel que, pour tout  $i \in \{0, 1\}$ ,

- $T(i, i, i; i) = T(i, 1-i, i; 1-i) = r$ ,
- $T(i, i, i; 1-i) = T(i, 1-i, i; i) = 1-r$ ,
- $T(i, 1-i, 1-i; i) = T(i, i, 1-i; 1-i) = p$ ,
- $T(i, 1-i, 1-i; 1-i) = T(i, i, 1-i; i) = 1-p$ .

En Figure 3.10 est présenté une réalisation du diagramme espace-temps de cet ACP.

Une réalisation du diagramme espace-temps de  $\mathbf{A}_8$  est une 2-coloration des faces de  $\overline{K}_\infty$  (une 2-coloration des faces est une coloration des faces à l'aide des deux couleurs  $\{0, 1\}$ ). Baxter[Bax82, Section 8.13] présente un codage, notons le  $\text{COD}_8$ , entre les 2-coloration de faces et les configurations du modèle à 8 sommets. Ce codage est le suivant : à partir d'une 2-coloration  $C$  des faces de  $\overline{K}_\infty$ , on obtient une orientation  $O = \text{COD}_8(C)$  de  $\overline{K}_\infty$  en orientant les arêtes adjacentes à 2 faces de même couleur vers le haut ( $\nearrow$  ou  $\nwarrow$ ) et celles adjacentes à deux faces de couleurs différentes vers le bas ( $\swarrow$  ou  $\searrow$ ) (voir Figure 3.11). Inversement, à partir d'une orientation  $O$  de  $\overline{K}_\infty$ , on peut obtenir deux 2-colorations des faces de  $\overline{K}_\infty$  différentes  $C^{(0)}$  et  $C^{(1)}$  ( $\{C^{(0)}, C^{(1)}\} = \text{COD}_8^{-1}(O)$ ) : pour cela, on colorie une face quelconque du plan de la couleur 0 ou 1, puis on colorie les faces adjacentes à cette première face de manière à respecter le codage précédemment défini (la face va avoir même couleur que la

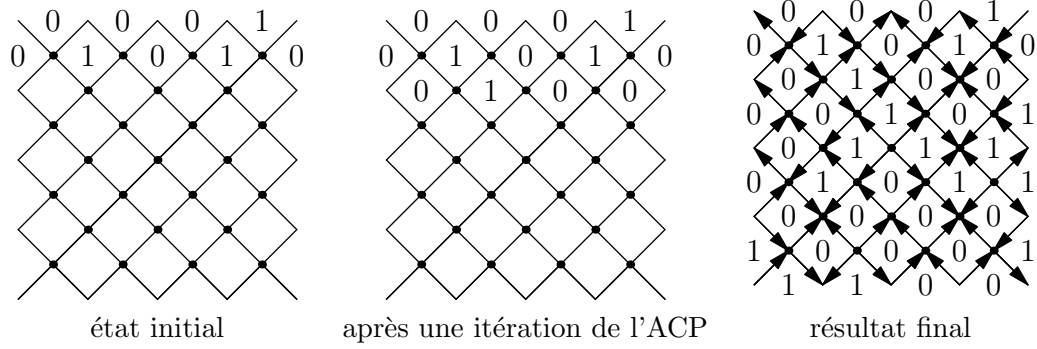


FIGURE 3.10 – Le diagramme espace-temps d’une réalisation de l’ACP triangulaire  $\mathbf{A}_8$  de l’Exemple 3.1.7 et la configuration du modèle à 8 sommets qui lui correspond

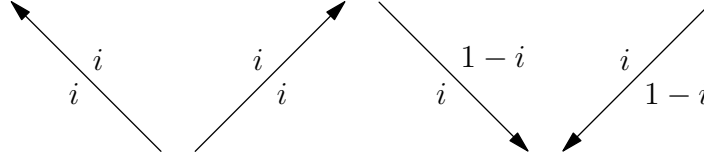


FIGURE 3.11 – Les relations qui permettent de passer d’une coloration des faces de  $\overline{K}_\infty$  avec 2 couleurs à une orientation de  $\overline{K}_\infty$ .

première face si leur arête commune est orientée vers le haut et va être de couleur différente si elle est orientée vers le bas) et ainsi de suite... Les deux 2-colorations de faces ainsi obtenues  $C^{(0)}$  et  $C^{(1)}$  vérifient la propriété suivante : pour tout face  $f$  de  $\overline{K}_\infty$ , les couleurs de  $f$  sont différentes dans  $C^{(0)}$  et  $C^{(1)}$ .

L’application du Théorème 3.1.6 à l’ACP triangulaire  $\mathbf{A}_8$  permet de démontrer la propriété suivante :

**Proposition 3.1.8.** *L’ACP triangulaire  $\mathbf{A}_8$  possède comme loi invariante  $\mathcal{I}$  la loi d’une  $(D, U)$ -HZMC avec  $D = U$  et, pour tout  $i, j$ ,  $D(i; j) = 1/2$ . De plus, c’est son unique loi invariante de type HZMC.*

Si nous avons introduit l’ACP triangulaire  $\mathbf{A}_8$ , c’est principalement pour le Lemme suivant qui permet de faire le lien entre le modèle à 8 sommets et les ACP triangulaires. Cela nous permet, par la suite, de déduire certains résultats sur le modèle à 8 sommets à partir de résultats sur  $\mathbf{A}_8$ .

**Lemme 3.1.9.** *Soit  $D$  le diagramme espace-temps de  $\mathbf{A}_8$  sous la loi initiale  $\mathcal{I}$ , alors  $COD_8(D)$  suit la loi  $\mathcal{L}(1/2; p, r)$ .*

La Lemme 3.1.9 se prouve en remarquant que, via  $\text{COD}_8$ ,  $\mathbf{A}_8$  définit les mêmes transitions que celles qui ont permis de définir  $\mathcal{L}(1/2; p, r)$  dans la Définition 3.1.4. Ainsi, la Proposition 3.1.8 et le Lemme 3.1.9 établissent la propriété suivante sur  $\mathcal{L}(1/2; p, r)$  :

**Corollaire 3.1.10.** *Si  $O \sim \mathcal{L}(1/2; p, r)$ , alors, pour tout  $t$ , les orientations  $(o(i, t) : i \in \mathbb{Z})$  sont indépendantes et, pour tout  $i$ , l'arête  $(i, t)$  est orientée vers le haut avec probabilité  $1/2$  et vers le bas avec probabilité  $1/2$ .*

Cela montre bien que la condition de bord  $\text{UI}(1/2)$  est remarquable car la loi imposée sur la première ligne se trouve alors être celle des autres lignes. De plus, c'est grâce à cette propriété que l'on prouve un équivalent de la Proposition 3.1.1 pour la fonction de corrélation du modèle à 8 sommets avec condition de bord  $\text{UI}(1/2)$  et avec  $b + d = a + c$  permettant ainsi de n'étudier que  $C(i, t) = C((0, 0); (i, t))$  plutôt que  $C((i, t); (i', t'))$  pour tout  $i, i', t, t'$ .

**Exemple 3.1.11.** Le deuxième ACP  $\mathbf{A}_6$  triangulaire étudié a pour alphabet  $E = \{0, 1, 2\}$  et comme matrice de transition  $T$  : pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,

- $T(i, i + 1, i + 2; i + 1) = 1$ ,
- $T(i, i + 1, i; i + 2) = p$ ,
- $T(i, i + 1, i; i + 1) = 1 - p$ .

Les additions sont effectuées modulo 3. Pour cet ACP, on considère que l'on part uniquement de  $S_{t_0}$  et  $S_{t_0+1}$  tel que, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $S_{t_0}(i) \neq S_{t_0+1}(i)$  et  $S_{t_0+1}(i) \neq S_{t_0}(i + 1)$ . Ainsi, cette même condition est vérifiée pour tout  $t \geq t_0$  et pas seulement  $t = t_0$  et une réalisation du diagramme espace-temps de cet ACP triangulaire est alors une 3-coloration propre des faces de  $\bar{K}_\infty$  (une 3-coloration propre des faces de  $\bar{K}_\infty$  est une coloration des faces de  $\bar{K}_\infty$  par 3 couleurs  $\{0, 1, 2\}$  de telle sorte que deux faces adjacentes par une arête sont de couleurs différentes). Or, il existe un codage, notons le  $\text{COD}_6$ , entre les 3-colorations de  $\bar{K}_\infty$  et les orientations du modèle à 6 sommets sur  $\bar{K}_\infty$  [Bax82, Section 8.13]. Ce codage est le suivant : soit  $C$  une 3-coloration propre des faces de  $\bar{K}_\infty$ , on définit l'orientation  $O = \text{COD}_6(C)$  en orientant les arêtes de  $\bar{K}_\infty$  de sorte que, pour une arête vue dans la direction orientée de la flèche, la valeur de la face à droite de l'arête soit une de plus que celle à gauche (modulo 3) (voir Figure 3.1.11). Réciproquement, une orientation  $O$  du modèle à 6 sommets sur  $\bar{K}_\infty$  a pour image réciproque  $\{C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}\} = \text{COD}_6^{-1}(O)$  trois 3-colorations propres des faces de  $\bar{K}_\infty$ . Pour une orientation  $O$  de  $\bar{K}_\infty$ , on obtient une de ces trois 3-colorations propres des faces, en coloriant d'abord une face quelconque de l'une des 3 couleurs possibles, puis en coloriant les autres faces au fur à mesure en veillant à respecter le codage précédemment défini (on colorie chaque face adjacente à la première face colorée en regardant l'orientation de leur arête commune et ainsi

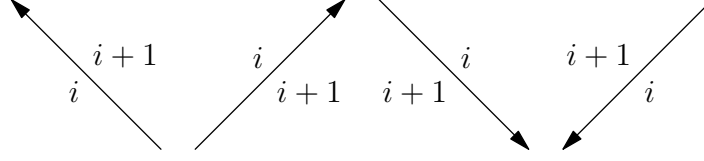


FIGURE 3.12 – Les relations qui permettent de passer d’une 3 coloration propre des faces de  $\overline{K}_\infty$  à une configuration admissible du modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$

de suite...). Les trois 3-colorations de faces ainsi obtenues  $C^{(0)}$ ,  $C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$  vérifient : pour tout face  $f$  de  $\overline{K}_\infty$ , les couleurs de  $f$  sont différentes dans  $C^{(0)}$ ,  $C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$ .

Le Théorème 3.1.5 (plutôt le Lemme 3.2.1 qui sert à sa preuve) permet de prouver :

**Lemme 3.1.12.** *Soit  $q \in [0, 1]$ , on note  $\mathcal{I}_q$  la loi de la  $(D, U)$ -HZMC avec  $D = U$  et tel que, pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $D(i; i+1 \bmod 3) = q$  et  $D(i; i-1 \bmod 3) = 1 - q$ . Alors, pour tout  $q \in [0, 1]$ , la loi  $\mathcal{I}_q$  est une loi invariante de l’ACP triangulaire  $\mathbf{A}_6$ .*

Le lemme suivant permet de faire le lien entre  $\mathbf{A}_6$  et le modèle à 6 sommets.

**Lemme 3.1.13.** *Soit  $D$  le diagramme espace-temps de  $\mathbf{A}_6$  avec comme loi initiale la loi  $\mathcal{I}_q$ , alors l’orientation  $O = \text{COD}_6(D)$  a pour loi  $\mathcal{L}(q; p, 1)$  qui est aussi la loi associée au modèle à 6 sommets sur le graphe  $\overline{K}_\infty$  avec condition de bord  $\text{UI}(q)$  et avec  $b = a + c$ .*

La preuve du Lemme 3.1.13 se fait en remarquant que, via  $\text{COD}_6$ , les transitions de  $\mathbf{A}_6$  sont les mêmes que celles qui permettent de définir  $\mathcal{L}(q; p, 1)$  dans la Définition 3.1.4. Ainsi, les Lemme 3.1.12 et 3.1.13 impliquent :

**Corollaire 3.1.14** (Résultat de [KDN90]). *Si  $O \sim \mathcal{L}(q; p, 1)$ , alors, pour tout  $t$ , les orientations  $(o(i, t) : i \in \mathbb{Z})$  sont indépendantes et la loi de  $o(i, t)$  est orientation vers le haut avec probabilité  $q$  et orientation vers le bas avec probabilité  $1 - q$ .*

Les conditions de bord  $\text{UI}(q)$  apparaissent ainsi remarquables pour le modèle à 6 sommets sur  $\overline{K}_\infty$  avec  $b = a + c$  car la loi de la première ligne est aussi la loi des lignes suivantes. Le Corollaire 3.1.14 apparaît déjà dans les résultats de [KDN90] et c’est grâce à cela qu’ils ont démontré la Proposition 3.1.1.

La suite du Chapitre est organisée de la façon suivante : dans la Section 3.2, on prouve les Théorèmes 3.1.5 et 3.1.6 et la Proposition 3.1.8 et, dans la Section 3.3, on démontre le Théorème 3.1.3.

## 3.2 Résultats sur les ACP triangulaires

### 3.2.1 Lemmes généraux sur les ACP triangulaires et les HZMC invariantes

Le début de la preuve est commune aux deux résultats et consiste en un jeu de réécriture des conditions pour qu'une HZMC soit invariante par un ACP triangulaire. Commençons par un lemme qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une  $(D, U)$ -HZMC soit invariante pour un ACP triangulaire.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $E$  un espace fini. Soit  $\mathbf{A}$  un ACP triangulaire à taux positif de matrice de transition  $T$  et  $D$  et  $U$  deux matrices de transition de  $E$  dans  $E$ . La  $(D, U)$ -HZMC est invariante par  $T$  ssi*

**Cond 23:** *pour tout  $a, c, d \in E$ ,*

$$D(a; d)U(d; c) = \sum_{b \in E} U(a; b)D(b; c)T(a, b, c; d). \quad (3.6)$$

Ce lemme est une généralisation de la Proposition 1.1.2. En particulier, on peut remarquer qu'en sommant (3.6) sur  $d$ , on obtient  $DU = UD$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{A}$  un ACP triangulaire à taux positif de matrice de transition  $T$  et  $(D, U)$  deux matrices de transitions de  $E$  dans  $E$ .

• Supposons que la  $(D, U)$ -HZMC est une loi invariante de  $\mathbf{A}$ . Supposons que les deux lignes  $(x_0, x_1)$  sont distribuées suivant la loi de la  $(D, U)$ -HZMC, alors  $(x_1, x_2)$  où  $x_2$  est l'image de  $(x_0, x_1)$  par  $\mathbf{A}$  est aussi distribué suivant la loi de la  $(D, U)$ -HZMC. Maintenant, pour tout  $a, c, d$ , calculons  $P(x_1(0) = a, x_2(0) = d, x_1(1) = c | x_1(0) = a)$ . En considérant, les lignes  $(x_1, x_2)$  distribuées suivant la loi de la  $(D, U)$ -HZMC, on trouve

$$P(x_1(0) = a, x_2(0) = d, x_1(1) = c | x_1(0) = a) = D(a; d)U(d; c) \quad (3.7)$$

et, en considérant les lignes  $(x_0, x_1)$  distribuées suivant la loi de la  $(D, U)$ -HZMC, puis une application de la transition de l'ACP, on trouve

$$\begin{aligned} & P(x_1(0) = a, x_2(0) = d, x_1(1) = c | x_1(0) = a) \\ &= \sum_{b \in E} P(x_1(0) = a, x_0(1) = b, x_2(0) = d, x_1(1) = c | x_1(0) = a) \\ &= \sum_{b \in E} U(a; b)D(b; c)T(a, b, c; d). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comme (3.7) et (3.8), on obtient bien que **Cond 23** est nécessaire.

• Pour la réciproque, il faut vérifier que si **Cond 23**, alors l'image d'une loi  $(D, U)$ -HZMC est encore une loi  $(D, U)$ -HZMC. On suppose que le couple de lignes

$(x_0, x_1)$  est distribué en suivant la loi d’une  $(D, U)$ -HZMC et que  $x_2$  est l’image de ce couple par  $\mathbf{A}$ . Alors, pour tout  $k \geq 1$ , tout  $(b_i : 0 \leq i \leq k) \in E^{k+1}$  et  $(c_i : 0 \leq i \leq k-1) \in E^k$ ,

$$P((x_1(i) = b_i : 0 \leq i \leq k), (x_2(i) = c_i : 0 \leq i \leq k-1)) \\ = \sum_{a_i \in E : 0 \leq i \leq k+1} \rho_0(a_0) \left( \prod_{i=0}^k D(a_i; b_i) U(b_i; a_{i+1}) \right) \left( \prod_{i=0}^{k-1} T(b_i, a_{i+1}, b_{i+1}; c_i) \right) \quad (3.9)$$

$$= \left( \sum_{a_0 \in E} \rho_0(a_0) D(a_0; b_0) \right) \prod_{i=0}^{k-1} \sum_{a_{i+1} \in E} U(b_i; a_{i+1}) D(a_{i+1}; b_{i+1}) T(b_i, a_{i+1}, b_{i+1}; c_i) \quad (3.10)$$

$$= \rho_0(b_0) \prod_{i=0}^{k-1} D(b_i; c_i) U(c_i; b_{i+1}) \quad (3.11)$$

où  $\rho_0$  est la probabilité invariante commune à  $D$  et  $U$ . Ainsi, les deux lignes  $(x_1, x_2)$  suivent une loi  $(D, U)$ -HZMC.  $\square$

Pour rappel, nous avons vu dans la Proposition 1.1.2 que, pour toute  $(D, U)$ -HZMC, il existe un unique ACP à 2 voisins de transition  $T_{a,c;d}^S$  qui laisse cette HZMC invariante : pour tout  $a, c, d$ ,

$$T_{a,c;d}^S = \frac{D_{a,d} U_{d,c}}{(DU)_{a,c}}. \quad (3.12)$$

Pour la même raison, il existe un unique ACP  $\mathbf{A}^R$  conservant la  $(U, D)$ -HZMC invariante, notons sa matrice de transition  $T^R$  :

$$T_{a,c;b}^R = \frac{U_{a,b} D_{b,c}}{(DU)_{a,c}}. \quad (3.13)$$

Ainsi, la **Cond 23** devient, en divisant par  $(DU)_{a,c}$  :

**Cond 24:** pour tout  $a, c, d$ ,

$$T_{a,c;d}^S = \sum_b T_{a,c;b}^R T_{a,b,c;d}. \quad (3.14)$$

**Corollaire 3.2.2.** *Soit  $E$  un espace fini. Soit  $T$  une matrice de transition de  $E^3$  dans  $E$  et  $D$  et  $U$  deux matrices de transition de  $E$  dans  $E$ . La  $(D, U)$ -HZMC est invariante par  $T$  ssi **Cond 24** est vérifiée avec  $T^S$  la matrice de transition de l’unique ACP à 2 voisins qui conserve la  $(D, U)$ -HZMC et  $T^R$  la matrice de transition de l’unique ACP à 2 voisins qui conserve la  $(U, D)$ -HZMC.*

L'idée directrice qui permet de prouver les Théorèmes 3.1.5 et 3.1.6 est, pour  $T$  donné, de trouver tous les couples de matrices de transitions  $(T^S, T^R)$  qui vérifient **Cond** 24 et de vérifier ensuite s'ils vérifient ou non les autres propriétés qu'on leur demande : conservation d'une  $(D, U)$ -HZMC et d'une  $(U, D)$ -HZMC à l'aide du Théorème 1.2.2. Dans le cas particulier où  $D = U$  ou  $E = \{0, 1\}$ , on trouve un unique couple  $(T^S, T^R)$ . Pour les autres cas, c'est a priori plus compliqué de trouver de tels couples.

### 3.2.2 Preuve du Théorème 3.1.5

Soit  $T(a, b, c; d)$  une matrice de transition d'un ACP triangulaire à taux positif. On note, pour tout  $a, c$ ,  $(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E)$ , le vecteur propre à gauche associé à valeur propre 1 de  $(T(a, b, c; d))_{b,d}$  normalisé tel que  $\sum_{b \in E} \tilde{T}(a, c; b) = 1$ , i.e. pour tout  $a, c$ ,

$$\tilde{T}_{a,c;d} = \sum_b \tilde{T}_{a,c;b} T_{a,b,c;d} \quad (3.15)$$

et  $\tilde{T}$  est une matrice de transition de  $E^2$  dans  $E$ . De plus, on suppose que  $\tilde{T}$  vérifie les conditions du Théorème 1.2.2 avec  $D^\eta = U^\eta$ , i.e. il existe  $D^\eta$  tel que la  $(D^\eta, D^\eta)$ -HZMC soit invariante par  $\tilde{T}$ . Dans ce cas, on remarque que l'ACP qui conserve la HZMC "renversé" est le même, i.e.  $T^R = T^S = \tilde{T}$  dans le Corollaire 3.2.2 et (3.15) implique **Cond** 24. On conclut en utilisant le Corollaire 3.2.2 que la  $(D^\eta, D^\eta)$ -HZMC est invariante par  $T$ .

Réciproquement, si la  $(D, D)$ -HZMC est invariante pour  $T$ , alors le Lemme 3.2.1 donne que, pour tout  $a, c, d \in E$ ,

$$D(a; d)D(d; c) = \sum_b D(a; b)D(b; c)T(a, b, c; d),$$

i.e. pour tout  $a, c$ ,  $(D(a; b)D(b; c) : b \in E)$  est un vecteur propre à gauche de  $(T(a, b, c; d))_{b,d}$  associé à la valeur propre 1. Par unicité de l'espace propre associé à la valeur propre 1 (Théorème de Perron-Frobenius), on en déduit que, pour tout  $a, c, b$ ,  $D(a; b)D(b; c) = \lambda_{a,c} \tilde{T}(a, c; b)$ . Comme on veut de plus que  $\tilde{T}(a, c; \cdot)$  soit une probabilité, cela implique que

$$\tilde{T}(a, c; b) = \frac{D(a; b)D(b; c)}{(DD)_{a,c}}.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 3.2.1, on en déduit que la  $(D, D)$ -HZMC est invariante par l'ACP de matrice de transition  $T^S$  et, par le Théorème 1.2.2, que l'ACP de matrice de transition  $\tilde{T}$  vérifie les conditions du Théorème 1.2.2.



### 3.2.3 Preuve du Théorème 3.1.6

Pour le cas  $E = \{0, 1\}$ , la simplification vient d’une propriété algébrique qui relie  $T^S$  à  $T^R$  dans le cas d’un alphabet  $E = \{0, 1\}$ .

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $E = \{0, 1\}$  et  $T^S$  et  $T^R$  deux matrices de transition de  $E^2$  dans  $E$  telles que la  $(D, U)$ -HZMC soit invariante par  $T^S$  et la  $(U, D)$ -HZMC soit invariante par  $T^R$ . Alors, pour tout  $a, c, b \in E$ ,*

$$T^S(a, c; b) = T^R(c, a; b). \quad (3.16)$$

*Démonstration.* Comme  $T^S$  conserve la  $(D, U)$ -HZMC, on sait par la Proposition 1.1.2 que, pour tout  $a, b, c$ , on a (3.12). De même, on a, pour tout  $a, b, c$ , (3.13).

Quand  $a = c = b$ , par (3.12) et (3.13),  $T^S(a, a; a) = T^R(a, a; a)$ , et, de plus, comme  $T^S(a, a; \cdot)$  et  $T^R(a, a; \cdot)$  sont des lois de probabilités sur  $\{0, 1\}$ , (3.16) est vraie quand  $a = c$ .

Traisons maintenant le cas compliqué quand  $a = 0$  et  $c = 1$  ( $a = 1$  et  $c = 0$  se traite de manière symétrique en remplaçant  $S$  par  $R$  dans ce qui suit) et  $b = 0$  ( $b = 1$  s’en déduira car  $T^S(0, 1; 0) + T^S(0, 1; 1) = 1 = T^R(1, 0; 0) + T^R(1, 0; 1)$ ). Par la Proposition 1.1.2, on a  $DU = UD$ , mais alors  $(UD)_{0,0} = (DU)_{0,0}$  qui se simplifie en  $U_{0,1}D_{1,0} = D_{0,1}U_{1,0}$ . Cette dernière équation implique  $U_{0,1}(UD)_{1,0} = U_{1,0}(DU)_{0,1}$  et, finalement,

$$T^S(0, 1; 0) = \frac{D_{0,0}U_{0,1}}{(DU)_{0,1}} = \frac{D_{0,0}U_{1,0}}{(DU)_{1,0}} = T^R(1, 0; 0).$$

□

Maintenant, faisons la preuve du Théorème 3.1.6.

*Démonstration du Théorème 3.1.6.* • Supposons que l’ACP triangulaire à taux positif de matrice de transition  $T(a, b, c; d)$  possède comme loi invariante la  $(D, U)$ -HZMC et notons  $(\tilde{T}(a, c; b) : b \in E)$  le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de  $(\sum_d T_{c,b,a;d} T_{a,d,c;e})_{b,e}$  et tel que  $\sum_b T(a, c; b) = 1$ . Par le Lemme 3.2.1, on a **Cond 23**. Comme  $E = \{0, 1\}$ , par le Lemme 3.2.3, cette condition se réécrit : pour tout  $a, c, d$ ,

$$T_{a,c;d}^S = \sum_b T_{c,a;b}^S T_{a,b;c;d}. \quad (3.17)$$

Cette équation appliquée deux fois permet d’établir que, pour tout  $a, c, e$ ,

$$\sum_b T_{a,c;b}^S \left( \sum_d T_{c,b,a;d} T_{a,d,c;e} \right) = \sum_d T_{c,a;d}^S T_{a,d,c;e} = T_{a,c;e}^S. \quad (3.18)$$

Autrement dit, pour tout  $a, c$ ,  $(T^S(a, c; b) : b \in E)$  est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de  $(\sum_d T_{c,b,a;d} T_{a,d,c;e})_{b,e}$ . Donc par le Théorème de Perron-Frobenius, pour tout  $a, b, c$ ,  $T^S(a, c; b) = \lambda_{a,c} \tilde{T}(a, c; b)$  avec  $\lambda_{a,c} = 1$  car on veut que la somme en  $b$  vaille 1 des deux côtés. Ainsi  $\tilde{T} = T^S$  est la matrice de transition qui laisse la  $(D, U)$ -HZMC invariante. Donc, par le Théorème 1.2.2 ou le résultat de Belyaev [BGM69],  $\tilde{T}$  vérifie **Cond 3**. La condition **Cond 22** est vraie grâce au Lemme 3.2.1.

• Réciproquement, si  $\tilde{T}$  vérifie **Cond 3**, alors on peut lui appliquer le Théorème 1.2.2 pour trouver  $(D^\eta, U^\eta)$  de telle sorte que la  $(D^\eta, U^\eta)$ -HZMC soit invariante par  $\tilde{T}$ . Si, de plus, ce  $(D^\eta, U^\eta)$  vérifie **Cond 22** alors, par le Lemme 3.2.1, la  $(D^\eta, U^\eta)$ -HZMC est invariante par  $T$ .  $\square$

### 3.2.4 Preuve de la Proposition 3.1.8

Pour prouver la Proposition 3.1.8, on va appliquer le Théorème 3.1.6 à l'ACP de l'Exemple 3.1.7. Tout d'abord, calculons les matrices  $(\sum_d T_{c,b,a;d} T_{a,d,c;e})_{b,e}$  pour tout  $a, c$ . On obtient les 4 matrices suivantes :

$a \backslash c$	0	1
0	$\begin{pmatrix} p^2 + (1-p)^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & p^2 + (1-p)^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r^2 + (1-r)^2 & 2r(1-r) \\ 2r(1-r) & r^2 + (1-r)^2 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} r^2 + (1-r)^2 & 2r(1-r) \\ 2r(1-r) & r^2 + (1-r)^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p^2 + (1-p)^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & p^2 + (1-p)^2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs propres à gauche associés à la valeur 1 sont tous identiques pour ces 4 matrices et valent  $(1/2 \ 1/2)$ . Ainsi, il nous faut maintenant étudier l'ACP à deux voisins dont les probabilités de transitions sont, pour tout  $a, b, c \in \{0, 1\}$ ,  $T(a, b; c) = 1/2$ . On observe facilement que cet ACP a comme unique loi invariante HZMC, la HZMC de noyaux de transition  $(D, U)$  avec, pour tout  $a, b, c \in \{0, 1\}$ ,  $D(a; c) = U(c; b) = 1/2$ . Ensuite, la **Cond 22** est vérifiée pour ce couple  $(D, U)$ . On en déduit, par le Théorème 3.1.6, que l'ACP a comme loi invariante cette HZMC et que c'est l'unique loi invariante de type HZMC.

## 3.3 Preuve du Théorème 3.1.3

Soit  $i$  et  $t$ . On se place sous la loi  $\mathcal{L}(1/2; p, r)$ . On rappelle, que pour tout arête  $(i, t)$ , la variable aléatoire  $e(i, t)$  vaut 1 si l'arête  $(i, t)$  est orientée vers le haut et 0 si elle est orientée vers le bas. Dans la Définition 3.1.4, il y a deux opérateurs  $T^e$  et  $T^i$  pour orienter ligne à ligne suivant que le temps est pair ou impair. Ici, on va considérer  $T^e$  et  $T^o$  agissant non plus sur  $\{\nwarrow, \nearrow, \swarrow, \searrow\}^{\mathbb{Z}}$ , mais sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  via la

projection qui envoie les orientations vers le haut ( $\nearrow$  et  $\nwarrow$ ) sur 1 et les orientations vers le bas ( $\searrow$  et  $\swarrow$ ) sur 0

### 3.3.1 Cas particulier : ( $i \geq 0$ et $t \leq i - 1$ ) ou ( $i \leq -1$ et $t \leq -i$ )

Soit  $(i, t)$  une arête de  $\overline{K}_\infty$ . Par la Définition 3.1.4, on sait que  $e(i, t)$  ne dépend que des états

- $(e(j, 0) : i - t \leq j \leq i + t - 1)$  si  $i + t$  est pair ( $t \neq 0$ );
- $(e(j, 0) : i - t + 1 \leq j \leq i + t)$  si  $i + t$  est impair ( $t \neq 0$ ).

Remarquons, que dans ces 2 cas, l’arête la plus à gauche a une abscisse paire et la plus à droite une abscisse impaire.

1er cas : supposons que  $i \geq 0$  et  $t \leq i - 1$ . Alors  $0 < i - t$  et donc  $e(i, t)$  ne dépend que d’états  $e(j, 0)$  avec  $j > 0$ . Mais la loi initiale que l’on a pris nous garantit que les  $(e(j, 0) : j > 0)$  sont indépendants de  $e(0, 0)$ . On en déduit ainsi que  $e(i, t)$  est indépendant de  $e(0, 0)$ , d’où  $C(i, t) = 0$ .

2ème cas : supposons que  $i \leq -1$  et  $t \leq -i$ . Alors  $i + t \leq 0$  et donc  $e(i, t)$  ne dépend que d’états  $e(j, 0)$  avec  $j < 0$  (en effet, soit  $i + t$  est pair et dans ce cas  $i + t - 1 < 0$ , soit  $i + t$  est impair, mais alors  $i + t \neq 0$  et donc  $i + t < 0$ ). On conclut comme dans le 1er cas *mutatis mutandis* que  $C(i, t) = 0$ .

Cela fournit une preuve simple du premier cas particulier du Théorème 3.1.3.

### 3.3.2 Cas général

Il y a deux cas à traiter :  $r \leq 1 - p$  et  $1 - p \leq r$ . Ils se traitent de la même façon à quelques différences près que nous commentons dans la Remarque 3.3.2 qui suit cette preuve. Nous allons ici traiter le cas où  $r \leq 1 - p$ .

Commençons par calculer  $C(i, t)$  :

$$\begin{aligned}
 C(i, t) &= E[e(0, 0)e(i, t)] - E[e(0, 0)] E[e(i, t)] = P(e(i, t) = 1 \text{ et } e(0, 0) = 1) - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{2} P(e(i, t) = 1 | e(0, 0) = 1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (2P(e(i, t) = 1 | e(0, 0) = 1) - 1) \\
 &= \frac{1}{4} (P(e(i, t) = 1 | e(0, 0) = 1) - P(e(i, t) = 0 | e(0, 0) = 1)) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Il nous faut donc calculer dans la suite

$$P(e(i, t) = 1 | e(0, 0) = 1) \text{ ou } P(e(i, t) = 0 | e(0, 0) = 1).$$

Pour cela nous allons travailler à l’aide de la Définition 3.1.4 et nous avons besoin du lemme suivant très important pour la suite. En quelques mots, ce lemme dit qu’après une transition  $T^e$  ou  $T^o$ , l’orientation haut/bas de l’arête  $(i, t)$  influence l’orientation haut/bas d’une unique arête aléatoire de la ligne  $((j, t + 1) : j \in \mathbb{Z})$ .

probabilité	$s^e(i)$	$s^e(i+1)$
$r$	$s(i)$	$s(i+1)$
$1-p-r$	$1-s(i+1)$	$1-s(i)$
$p$	$1-s(i)$	$1-s(i+1)$

TABLE 3.1 – Le couplage effectué dans la preuve du Lemme 3.3.1

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $i \in \mathbb{Z}$ . Soit  $(s(j) : j \in \mathbb{Z})$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$  telle que  $s(i)$  soit indépendante de  $(s(j) : j \neq i)$ . On note  $s^e$  la suite aléatoire obtenue à partir de  $s$  par  $T^e$ , alors*

- avec probabilité  $r$ , que  $s^e(i) = s(i)$  et  $(s^e(j) : j \neq i)$  sont indépendantes de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $1-p-r$ , que  $s^e(i+(-1)^i) = 1-s(i)$  et  $(s^e(j) : j \neq i+(-1)^i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $p$ , que  $s^e(i) = 1-s(i)$  et  $(s^e(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$ .

De manière similaire, en notant  $s^o$  la suite aléatoire obtenue à partir de  $s$  par  $T^o$ ,  $s^o$  vérifie

- avec probabilité  $r$ , que  $s^o(i) = s(i)$  et  $(s^o(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $1-p-r$ , que  $s^o(i-(-1)^i) = 1-s(i)$  et  $(s^o(j) : j \neq i-(-1)^i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $p$ , que  $s^o(i) = 1-s(i)$  et  $(s^o(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$ .

*Démonstration.* Nous effectuons la preuve pour  $s^e$  et  $i$  pair, les autres cas se traitant de façon similaire.

Si  $s(i+1) = 1-s(i)$ , alors avec probabilité  $1-p$ ,  $s^e(i) = s(i) = 1-s(i+1)$  et  $s^e(i+1) = s(i+1) = 1-s(i)$  et, avec probabilité  $p$ ,  $s^e(i) = 1-s(i)$  et  $s^e(i+1) = 1-s(i+1)$  ; mais si  $s(i+1) = s(i)$ , alors avec probabilité  $r$ ,  $s^e(i) = s(i)$  et  $s^e(i+1) = s(i+1)$  et, avec probabilité  $1-r$ ,  $s^e(i) = 1-s(i) = 1-s(i+1)$  et  $s^e(i+1) = 1-s(i+1) = 1-s(i)$ .

Il faut observer, du fait que  $r \leq 1-p$  et par un argument de couplage, qu'

- avec probabilité  $r$ ,  $s^e(i) = s(i)$  et la valeur de  $s^e(i+1)$  dépend uniquement de la valeur de  $s(i+1)$  ;
- avec probabilité  $1-p-r$ ,  $s^e(i+1) = 1-s(i)$  et la valeur de  $s^e(i)$  dépend uniquement de la valeur de  $s(i+1)$  ;
- avec probabilité  $p$ ,  $s^e(i) = 1-s(i)$  et la valeur de  $s^e(i+1)$  dépend uniquement de la valeur de  $s(i+1)$ .

Le tableau 3.1 illustre cet argument de couplage.

Enfin, par la définition de  $T^e$ , les  $(s^e(j) : j \neq i, i+1)$  dépendent que des  $(s(j) : j \neq i, i+1)$  et donc pas de  $s(i)$  par hypothèse. Ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Ce lemme est central. Il permet à lui seul de comprendre l'influence exacte de l'état  $e(0,0)$  sur une configuration du modèle à 8 sommets sur le graphe  $\overline{K}_\infty$  avec  $b+d = a+c$ . Cette influence peut se décrire en terme d'une marche aléatoire inhomogène (les transitions dépendent de la parité du temps)  $(X_t : t \geq 0)$  sur  $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$  :

- $X_0 = (0, e(0,0))$  p.s. ;
- si  $X_t = (i, k)$ , alors  $X_{t+1} = \begin{cases} (i, k) & \text{a.p. } r, \\ (i + (-1)^{i+t}, 1-k) & \text{a.p. } 1-p-r, \\ (i, 1-k) & \text{a.p. } p. \end{cases}$

Sous ces termes, (3.19) se réécrit en

$$C(i, t) = \frac{1}{4} (P(X_t = (i, 1) | X_0 = (0, 1)) - P(X_t = (i, 0) | X_0 = (0, 1))). \quad (3.20)$$

Ainsi, calculer la probabilité au temps  $t$  de l'état de cette marche aléatoire  $X$  revient à calculer la fonction de corrélation  $C$ . Pour calculer  $P(X_t = (i, 1) | X_0 = (0, 1))$  et  $P(X_t = (i, 1) | X_0 = (0, 1))$ , nous allons utiliser des séries génératrices et les méthodes de Flajolet-Sedgewick sur le calcul des séries génératrices [FS09].

Soit  $\tilde{E}$ , l'ensemble des chemins qui vont de  $(0,0)$  à  $(i,t)$  en empruntant des pas  $(-1,1)$ ,  $(0,1)$  ou  $(1,1)$  et qui respectent les deux conditions suivantes :

- si le chemin est en un point  $(i', t')$  avec  $i' + t'$  impair, alors il effectue un pas  $(-1,1)$  ou un pas  $(0,1)$  et
- si le chemin est en un point  $(i', t')$  avec  $i' + t'$  pair, alors il effectue un pas  $(1,1)$  ou un pas  $(0,1)$ .

On appelle un chemin coloré  $(w, s)$  de  $\tilde{E}$  le couple d'un chemin  $w$  de  $\tilde{E}$  et d'une fonction  $s$  qui à chaque sommet  $(i', t')$  de  $w$  associe une couleur  $s(i', t') \in \{0,1\}$ .

On note  $E$ , l'ensemble des chemins colorés  $(w = ((0,0), (i_1,1), \dots, (i_{t-1}, t-1), (i,t)), s)$  de  $\tilde{E}$  qui vérifient les contraintes suivantes :

- $s((0,0)) = 1$  et
- pour tout  $1 \leq j \leq t$ ,  $s((i_j, t)) = 1 - s((i_{j-1}, t))$  si  $|i_j - i_{j-1}| = 1$ , autrement dit si le pas de  $(i_{j-1}, j-1)$  vers  $(i_j, j)$  est un pas diagonal  $((-1,1)$  ou  $(1,1))$ , alors la couleur change.

Pour pouvoir compter facilement l'ensemble  $E$ , suivant des critères que nous définirons par la suite, nous considérons les 4 sous-ensembles, qui forment une partition de  $E$ , suivants : pour tout  $k \in \{0,1\}$ ,

- $E_{k,e}$  est l'ensemble des chemins colorés de  $E$  qui finissent en un point  $(i,t)$  avec  $i+t$  pair et  $s(i,t) = k$ ,

- $E_{k,o}$  est l'ensemble des chemins colorés de  $E$  qui finissent en un point  $(i, t)$  avec  $i + t$  impair et  $s(i, t) = k$ .

Dans le symbolisme de Flajolet-Sedgewick, les relations entre ces ensembles s'écrivent

$$E_{1,e} = 1 + \begin{array}{c} E_{0,e} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,o} \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{0,o} \\ | \\ 1 \end{array}, E_{0,e} = \begin{array}{c} E_{1,e} \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} E_{0,o} \\ | \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,o} \\ | \\ 0 \end{array}, \quad (3.21)$$

$$E_{1,o} = \begin{array}{c} E_{0,o} \\ / \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,e} \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{0,e} \\ | \\ 1 \end{array}, E_{0,o} = \begin{array}{c} E_{1,o} \\ / \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} E_{0,e} \\ | \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,e} \\ | \\ 0 \end{array}. \quad (3.22)$$

Nous allons maintenant dénombrer ces 4 ensembles en les comptant suivant 6 statistiques bien précises qui sont

- $n_v(w)$ , le nombre d'arête vertical  $((0, 1))$  dans le chemin coloré  $(w, s)$ ,
- $n_d(w)$ , le nombre d'arête diagonal  $((-1, 1)$  ou  $(1, 1))$  dans le chemin  $(w, s)$ ,
- $t(w)$ , la longueur en nombre d'arête du chemin coloré  $(w, s)$ ,
- $i(w) = i + t$  où  $(i, t)$  est le sommet final du chemin coloré  $(w, s)$ ,
- $n_c(w, s)$ , le nombre de fois que l'on a un changement de couleur le long d'une arête verticale  $((0, 1))$  dans le chemin  $(w, s)$  et
- $n_k(w, s)$ , le nombre de fois qu'il n'y pas de changement de couleur le long d'une arête verticale  $((0, 1))$  dans le chemin  $(w, s)$ .

Un certain nombre de ces statistiques sont redondantes, ceci afin de simplifier la preuve au niveau des équations (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27) qui apparaissent dans la suite.

Pour énumérer ces 4 ensembles suivant ces 6 statistiques, nous utilisons les séries génératrices  $F_{1,e}$ ,  $F_{0,e}$ ,  $F_{1,o}$  et  $F_{0,o}$  définies par :

$$F_{1,e}(v, d, l, x, c, k) = \sum_{(w,s) \in E_{1,e}} v^{n_v(w)} d^{n_d(w)} l^{t(w)} x^{i(w)} c^{n_c(w,s)} k^{n_k(w,s)} \quad (3.23)$$

et idem *mutatis mutandis* pour les 3 autres.

Il faut remarquer qu'en prenant  $d = (1 - (p + r))$ ,  $v = p + r$ ,  $k = r/(p + r)$  et

$c = p/(p+r)$ , on a alors

$$F_{1,e} = \sum_{t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z} | i+t \text{ pair}} P(X_t = (i, 1) | X_0 = (0, 1)) l^t x^{i+t}, \quad (3.24)$$

$$F_{0,e} = \sum_{t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z} | i+t \text{ pair}} P(X_t = (i, 0) | X_0 = (0, 1)) l^t x^{i+t}, \quad (3.25)$$

$$F_{1,o} = \sum_{t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z} | i+t \text{ impair}} P(X_t = (i, 1) | X_0 = (0, 1)) l^t x^{i+t}, \quad (3.26)$$

$$F_{0,o} = \sum_{t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z} | i+t \text{ impair}} P(X_t = (i, 0) | X_0 = (0, 1)) l^t x^{i+t}. \quad (3.27)$$

Ainsi, la valeur de  $C(i, t)$  est le coefficient devant le terme en  $l^t x^{i+t}$  du développement en séries en  $l$  et en  $x$  au voisinage de  $(0, 0)$  de la fonction  $F_{1,e} - F_{0,e} + F_{1,o} - F_{0,o}$  évalué en  $d = (1 - (p+r))$ ,  $v = p+r$ ,  $k = r/(p+r)$  et  $c = p/(p+r)$ .

Pour calculer les séries génératrices  $F_{1,e}$ ,  $F_{0,e}$ ,  $F_{1,o}$  et  $F_{0,o}$ , nous utilisons les équations (3.21) et (3.22) qui se traduisent au niveau des séries génératrices en

$$\begin{aligned} F_{1,e} &= 1 + GF_{0,e} + KF_{1,o} + CF_{0,o}, \\ F_{0,e} &= GF_{1,e} + KF_{0,o} + CF_{1,o}, \\ F_{1,o} &= DF_{0,o} + KF_{1,e} + CF_{0,e}, \\ F_{0,o} &= DF_{1,o} + KF_{0,e} + CF_{1,e}. \end{aligned}$$

avec  $G = dl x^2$ ,  $D = dl$ ,  $K = kvlx$  et  $C = clvx$ .

Ce système se résout (à la main ou à l’aide d’un logiciel de calcul formel tel que Sage) et sa résolution permet d’obtenir les formules suivantes pour les fonctions génératrices :

$$F_{1,e} = \frac{1 - 2CGK - C^2 - G^2 - K^2}{H} \quad (3.28)$$

$$F_{0,e} = \frac{C^2G - DG^2 + GK^2 + 2CK + D}{H} \quad (3.29)$$

$$F_{1,o} = \frac{-K^3 + C(G + D) + K(C^2 + GD + 1)}{H} \quad (3.30)$$

$$F_{0,o} = \frac{-C^3 + K(G + D) + C(K^2 + GD + 1)}{H} \quad (3.31)$$

avec  $H = ((C + K)^2 - (1 - G)(1 - D))((C - K)^2 - (1 + G)(1 + D))$ . On obtient alors la formule

$$F_{1,e} - F_{0,e} + F_{1,o} - F_{0,o} = \frac{C - G - K - 1}{(C - K)^2 - (1 + G)(1 + D)} \quad (3.32)$$

qui, évaluée en  $C = plx$ ,  $K = rlx$ ,  $G = (1 - p - r)l$  et  $D = (1 - p - r)lx^2$ , nous donne bien la fraction rationnelle (3.5).

Cela conclut donc la preuve du Théorème 3.1.3 dans le cas  $r \leq 1 - p$ .

*Remarque 3.3.2.* Dans le cas où  $1 - p \leq r$ , le Lemme 3.3.1 est remplacé par le lemme suivant (les changements entre les deux lemmes sont indiqués en gras) :

*Lemme 3.3.3.* Soit  $i \in \mathbb{Z}$ . Soit  $(s(j) : j \in \mathbb{Z})$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$  tel que  $s(i)$  soit indépendant de  $(s(j) : j \neq i)$ , alors  $s^e = T^e(s)$  vérifie,

- avec probabilité  $\mathbf{1} - \mathbf{p}$ , que  $s^e(i) = s(i)$  et  $(s^e(j) : j \neq i)$  sont indépendantes de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $\mathbf{r} + \mathbf{p} - \mathbf{1}$ , que  $s^e(i + (-1)^i) = \mathbf{s}(\mathbf{i})$  et  $(s^e(j) : j \neq i + (-1)^i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $\mathbf{1} - \mathbf{r}$ , que  $s^e(i) = 1 - s(i)$  et  $(s^e(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$ .

De manière similaire,  $s^o = T^o(s)$  vérifie

- avec probabilité  $\mathbf{1} - \mathbf{p}$ , que  $s^o(i) = s(i)$  et  $(s^o(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $\mathbf{r} + \mathbf{p} - \mathbf{1}$ , que  $s^o(i - (-1)^i) = \mathbf{s}(\mathbf{i})$  et  $(s^o(j) : j \neq i - (-1)^i)$  sont indépendants de  $s(i)$  ;
- avec probabilité  $\mathbf{1} - \mathbf{r}$ , que  $s^o(i) = 1 - s(i)$  et  $(s^o(j) : j \neq i)$  sont indépendants de  $s(i)$ .

Ces changements impactent la suite de la preuve : il faut changer la définition de la marche aléatoire  $X$  sur  $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$  en conséquence. On a alors besoin de compter l'ensemble  $E'$  des chemins colorés  $(w, s)$  qui ont comme contraintes que  $s(0, 0) = 1$  et que  $s(i_j, j) = s(i_{j-1}, j)$  quand  $|i_j - i_{j-1}| = 1$ . On les sépare là encore en 4 sous-ensembles de chemins colorés dont on peut déterminer les fonctions génératrices  $F'$ . On évalue  $F'_{1,e} - F'_{0,e} + F'_{1,o} - F'_{0,o}$  en  $d = (p + r - 1)$ ,  $v = 2 - (p + r)$ ,  $k = (1 - p)/(2 - (p + r))$  et  $c = (1 - r)/(2 - (p + r))$  pour finalement obtenir la fraction rationnelle (3.5).

### 3.4 Cas particulier : $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{d}$

Dans le cas où  $a = d$  et  $b = c$ , on a alors  $p + r = 1$  et la fraction rationnelle 3.5 vaut

$$\frac{1 + lx(1 - 2p)}{1 - l^2x^2(1 - 2p)^2} = \frac{1}{1 - lx(1 - 2p)}$$



dont le développement en série en  $l$  et en  $x$  au voisinage de  $(0, 0)$  est

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1 - 2p)^j l^j x^j.$$

Par identification des coefficients devant  $l^t x^{i+t}$  avec  $C(i, t)$ , on trouve bien

$$C(i, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ (1 - 2p)^t & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Cela conclut la preuve du Théorème 3.1.3.

Deuxième partie

Processus itérés (*ad libitum*)



## Chapitre 4

# Processus itérés

## 4.1 Introduction

Let  $B, B_1, B_2, \dots$  be a family of i.i.d. independent two-sided Brownian motions (BM), meaning that for any  $n$ ,  $(B_n(t), t \geq 0)$  and  $(B_n(-t), t \geq 0)$  are two independent standard linear BM. Denote by  $I^{(n)} = B_n \circ \dots \circ B_1$  the  $n$ th time iterated BM. Curien and Konstantopoulos [CK14] obtained the following results, gathered in the following proposition.

**Proposition 4.1.1.** (1) *For any  $k \geq 1$ , any non zero and all different  $t_1, \dots, t_k$ ,  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  converges in distribution. The limit distribution  $\mu_k$  does not depend on the  $t_i$ 's and then is exchangeable.*

(2) *For  $(I_1, \dots, I_k) \sim \mu_k$ , the equality  $(I_1, \dots, I_k) \stackrel{d}{=} (B(I_1), \dots, B(I_k))$  holds. Moreover,*

$$(I_2 - I_1, \dots, I_k - I_1) \stackrel{d}{=} (I_1, \dots, I_{k-1}) \sim \mu_{k-1}.$$

*The distribution of  $I_1$  possesses the density  $\exp(-2|x|)$  over  $\mathbb{R}$  (this result appeared first in Turban [Tur04]).*

(3) *Let  $\phi_n$  be the occupation measure of  $I^{(n)}$  on  $[0, 1]$ , then the sequence  $(\phi_n, n \geq 0)$  converges as  $n \rightarrow \infty$  in distribution to a random probability measure  $\phi$ , which has a.s. a finite support, and which has a.s. a Hölder continuous density with exponent  $1/2 - \epsilon$  for all  $\epsilon > 0$ .*

In this paper we extend in several connected directions: among others we give some elements on  $\mu_k$ , study iterated reflected BM, iterated stable processes, and provide a description of the finite dimensional distribution of the  $n$ th iterated BM  $I^{(n)}$ .

Here are the main lines of the paper. In Section 4.2 we present the studied processes and fix some notations. In Section 4.3 we provide some common features of the processes we iterate. Given a finite set of points  $L = \{\ell_i, i = 0, \dots, k\}$ , the gaps sequence of  $L$  is the sequence  $G = (\widehat{\ell}_i - \widehat{\ell}_{i-1}, 1 \leq i \leq k)$ , of differences of successive points in  $L$  when sorted in increasing order. It turns out that for processes  $X$  with independent and stationary increments, the distribution of the gaps sequence of  $X(L) = \{X(\ell_i), i \in I\}$  can be described uniquely using the gaps sequence  $G$  of  $L$ . This simple property will appear to be at the heart of our advances about iterated BM.

In Section 4.4, devoted to iterated BM and iterated reflected BM, it is explained that if the initial gaps sequence  $G$  is a  $k$  tuple of independent exponential random variables (r.v.) with parameters  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  then the gaps sequence of  $X(L)$  is distributed according to a mixture of  $k$ -tuple of independent exponential r.v., whose

parameters are explicit functions of  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . To encode this property, we define a Markov chain  $(Z^{(n)}, n \geq 1)$  at the parameter level, which makes explicit this parameter evolution (see (4.25) and around).

A consequence is that the gaps sequence of the iterated BM ad libitum is a mixture of independent exponential r.v. and this mixture can be described precisely using the invariant distribution of the Markov chain  $Z^{(n)}$  (Propositions 4.4.5, 4.4.6 and Theorem 4.4.1).

Somehow, Remark 4.4.9 implies that our description of the iterated BM finite dimensional distribution, while complex, is the simplest we could expect.

The same construction, using an analogous of the parameter Markov chain  $(Z^{(n)}, n \geq 1)$ , implies that the law of the  $n$ th iterated BM is accessible if the gaps sequence of the initial distribution follows some independent exponential r.v. In Section 4.4.3, it is seen that this property provides a Laplace type transform of the finite dimensional distributions of the  $n$ th iterated BM  $I^{(n)}$ . Section 4.4.2 is devoted to the iteration of reflected BM. Section 4.5 is devoted to the iteration of stable processes, whose study appear much similar to that of iterated BM, except that explicit computations are out of reach for the moment.

We discuss in Section 4.6 some natural extensions of this work.

## 4.2 Random processes

“BM” will be used to denote the two-sided linear BM as defined at the beginning of Section 4.1. The process corresponding to the  $n$ th iterated process will be denoted  $I^{(n)}$  (the process iterated under discussion, denoted  $X$  further, will be clear from the context). The processes iterated ad libitum, the limit of  $I^{(n)}$  in the sense of the topology of finite dimensional distribution convergence, when it exists will be denoted  $I$ . The reflected BM is the (one-sided) process  $(|B(t)|, t \geq 0)$  where  $B$  is the standard linear BM.

We go on discussing stable processes (see Applebaum [App04] for more information). We will consider only two-sided stable variables  $Z$  that can be written in the form  $A + r$  where  $A$  is stable symmetric (null skewness) and  $r$  a real number (the location parameter). The characteristic function of such a r.v.  $Z$  can be written under the form

$$\psi(u) = E[e^{iuZ}] = e^{\eta(u)}$$

where

$$\eta(u) = -|u|^\alpha \sigma^\alpha + iru$$

where  $\alpha \in (0, 2]$  is the index of stability,  $\sigma \in (0, \infty)$  the scale parameter (Theorem 1.2.21 in [App04]). A stable process  $(X(t), t \geq 0)$  with parameters  $(\alpha, \sigma, r)$  is the

process such that  $X(0) = 0$ , with stationary and independent increments and whose characteristic function is

$$\Phi_t(u) = E[e^{iuX(t)}] = e^{t\eta(u)}. \quad (4.1)$$

The two sided stable process  $(X(t), t \in \mathbb{R})$  is the process such that  $(X(t), t \geq 0)$  and  $(X(t), t < 0)$  are independent and  $(X(t), t \geq 0)$  and  $(-X(-t), t \geq 0)$  are both one-sided stable process with parameters  $(\alpha, \sigma, r)$ . For any  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\frac{X_t - tr}{|t|^{1/\alpha}} \stackrel{d}{=} X_1 - r. \quad (4.2)$$

For any  $c > 0$ ,  $(X(c^\alpha t), t \geq 0)$  is a stable process with parameters  $(\alpha, c\sigma, c^\alpha r)$ .

Let  $(X_1, X_2, \dots)$  be a family of i.i.d. two-sided stable processes with parameters  $(\alpha, \sigma, r)$ . The  $n$ th iterated stable process  $I^{(n)}$  of parameters  $(\alpha, \sigma, r)$  is the process

$$I^{(n)} = X_n \circ \dots \circ X_1.$$

We keep the same notation as for the iterated two-sided BM for some reasons that will appear clearly later.

*Remark 4.2.1.* The BM is the stable process with parameters  $(2, 1/\sqrt{2}, 0)$ . Its Markov kernel is  $P(B_{t+s} \in dy | B_s = x) = \exp(-(y-x)^2/(2t))/\sqrt{2\pi t}$ .

Iteration of stable processes with parameter  $(\alpha, 1, 0)$  and  $(\alpha, \sigma, 0)$  can be directly compared as explained in Remark 4.5.1.

### 4.3 Iteration of processes: general considerations

In this section, we discuss some common features of the processes we iterate in the paper.

the size of the finite dimensional distributions under inspection.

**Notations.** We denote by  $\llbracket a, b \rrbracket$  the ordered sequence  $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ . The permutation group of the set  $\llbracket a, b \rrbracket$  is denoted  $\mathcal{S} \llbracket a, b \rrbracket$ . Sometimes, we will use the notation  $x[a : b]$  instead of  $(x_a, \dots, x_b)$ , and also  $t[a : b]$ ,  $g[a : b]$ ,  $\lambda[a : b]$ , etc, accordingly. The simple notation  $x[k]$  will stand for  $x[1 : k]$ .

For any sequence  $\ell[0 : k] = (\ell_0, \dots, \ell_k)$ , denote by  $(\widehat{\ell}[0 : k]) = \text{sort}(\ell[0 : k])$  this sequence sorted in increasing order. For any  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , set

$$\Delta \ell_i = \ell_i - \ell_{i-1}.$$

The gaps sequence of  $\ell[0 : k]$  is the sequence of distances between the elements of  $\{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ . It is defined by

$$\mathbf{gaps}(\ell[0 : k]) = \left( \Delta \widehat{\ell}_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket \right).$$

Last, for  $x[1 : k]$  a sequence,  $\bar{x}[0 : k]$  is the sequence defined by

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_i = x_1 + \dots + x_i, \quad \text{for } i \in \llbracket 1, k \rrbracket. \quad (4.3)$$

**Iteration of processes.** What follows is valid for processes  $X$  such that  $X(0) = 0$  a.s., with independent and stationary increments, whose distribution are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}$  such that for any  $t > s$ ,

$$X(t) - X(s) \stackrel{d}{=} X(t - s) \quad (4.4)$$

whatever are the signs of  $s$  and  $t$ . Notice that this implies  $-X(s) \stackrel{d}{=} X(-s)$  (taking  $t = 0$ ). These general setting are satisfied by BM, by symmetric two-sided stable processes, and more generally, by symmetric two-sided Lévy processes such that for any  $t > 0$ ,  $X(t)$  owns a density. Some modifications are needed for processes such as the reflected BM which have stationary but dependent increments. This is discussed in Section 4.4.2.

Denote by  $\Phi_t(\cdot)$  the density of the distribution of  $X(t)$ . We then have

$$\Phi_t(y) = \Phi_{-t}(-y), \quad \text{for any } (t, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

#### 4.3.1 The gaps sequence evolution

Let  $(t_0 = 0, t_1, \dots, t_k)$  be distinct real positive numbers. We start with the description of the distribution of  $(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$ . As usual, the description is easier if the  $t_i$  are sorted.

Let  $\tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$  such that  $(\widehat{t}_i = t_{\tau(i)}, i \in \llbracket 0, k \rrbracket) = \text{sort}(t[0 : k])$ . Hence,  $\widehat{t}_{\tau^{-1}(0)} = 0$ . Further let  $g[k] = \mathbf{gaps}(t[0 : k])$ . The r.v.  $(X(\widehat{t}_{i+1}) - X(\widehat{t}_i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  are independent, and  $X(\widehat{t}_i) - X(\widehat{t}_{i-1}) \stackrel{d}{=} X(\Delta \widehat{t}_i)$  depends on the gaps sequence of the  $t_i$ 's. Using the independence of the increments of  $X$  and their stationarity, we obtain that the density  $f$  of  $(X(t_i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  on  $\mathbb{R}^k$  is

$$f(y[k]) = \prod_{j=1}^k \Phi_{\Delta \widehat{t}_j}(\Delta y_{\tau(j)}) \quad (4.6)$$



where in the right hand side  $y_0 = 0$ . Indeed, one has  $(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket) = (X(\hat{t}_{\tau^{-1}(i)}), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$ , and computing  $P(X(\hat{t}_{\tau^{-1}(i)}) \in dy_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket) = P(X(\hat{t}_i) \in dy_{\tau(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  gives the result, using (4.5).

The distribution of  $\mathbf{gaps}(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  depends also only on  $\mathbf{gaps}(t[0 : k])$ , and this is one of the key point of the paper. First, determine the vectors  $(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  such that

$$\mathbf{gaps}(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket) = x[k] \quad (4.7)$$

where  $x[k]$  is an element of  $(0, +\infty)^k$ . Clearly (4.7) holds iff there exists some  $a \in \mathbb{R}$  such that

$$\mathbf{sort}(X(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket) = (a + \bar{x}_i, i \in \llbracket 0, k \rrbracket). \quad (4.8)$$

Equation (4.8) implies that for a certain permutation  $\tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$

$$(X(\hat{t}_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket) = (a + \bar{x}_{\tau(i)}, i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$$

from what we find

$$(X(\hat{t}_i) - X(\hat{t}_{i-1}), i \in \llbracket 1, k \rrbracket) = (\Delta \bar{x}_{\tau(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket). \quad (4.9)$$

The following proposition should be clear now

**Proposition 4.3.1.** *Let  $t[0 : k]$  be  $k + 1$  distinct real numbers with  $t_0 = 0$  such that*

$$\mathbf{gaps}(t[0 : k]) = g[k] \in (0, +\infty)^k.$$

*The distribution of  $\mathbf{gaps}((X(t_0), \dots, X(t_k)))$  has density  $\Psi_{g[k]}$  on  $(\mathbb{R}^+)^k$  where*

$$\Psi_{g[k]}(x[k]) = \sum_{\tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket} \prod_{i=1}^k \Phi_{g_i}(\Delta \bar{x}_{\tau(i)}) 1_{x_i > 0}. \quad (4.10)$$

In the mono-dimensional case,

$$\Psi_g(x) = (\Phi_g(x) + \Phi_g(-x)) 1_{x \geq 0} \quad (4.11)$$

and this is also  $2\Phi_g(x) 1_{x \geq 0}$  when  $\Phi_g$  is even (that is when  $r = 0$  in the stable processes cases).

We may now define a time-homogeneous MC  $(\mathbf{G}^{(n)}[k] = (\mathbf{G}_i^{(n)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket), n \geq 0)$  taking its values in  $(0, +\infty)^k$ , giving the successive gaps sequence starting from an initial one; its Markov kernel is given by  $\Psi$  in the sense of Proposition 4.3.1. We will call  $\mathbf{G}^{(n)}$  the gaps sequence MC. Assume that  $\mathbf{G}_k^{(0)}$  is a r.v. that possesses a density

$f_k$  on  $(0, +\infty)^k$ . The density of  $\mathbf{G}_k^{(1)}$  is  $\mathbf{Op}_k(f_k)$  where  $\mathbf{Op}_k$  is the following integral operator (which sends  $f_k$  onto  $\mathbf{Op}_k(f_k)$ ), where for any  $x[k] \in \mathbb{R}^k$ ,

$$\mathbf{Op}_k(f_k)(x[k]) := \int \cdots \int f_k(g[k]) \Psi_{g[k]}(x[k]) dg_1 \dots dg_k. \quad (4.12)$$

Of course, if one considers a case for which the iterated process converges in distribution,

$$I^{(n)}[k] = (I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} I[k] = (I(t_1), \dots, I(t_k))$$

then the associated gap MC  $(\mathbf{G}^{(n)}[k], n \geq 0)$  converges too since the map  $x[0; k] \rightarrow \mathbf{gaps}(x[0; k])$  is continuous. The converse is false but not that much: the gaps sequence characterises the points relative positions. An additional information is needed to recover their positions: somehow the distribution of the translations which sends  $\mathbf{gaps}((I(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket))$  onto  $\{I(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket\}$ , and the distribution of the permutation which provides the distribution of  $(I(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  knowing  $\{I(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket\}$ . A simple but powerful trick, discussed at several places in the paper is the following : we are able to pass from the gaps sequence MC to the usual one if instead of  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$ , we study  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  instead, where  $t_0 = 0$ .

We can sum up in two slogans the relative importance of the iteration of the initial process  $X$  with respect to the gap MC: the proof of convergence is easier for  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$ , but the behaviour of  $\mathbf{G}^{(n)}[k]$  is easier to understand, and its distribution in the case of Brownian processes is tractable.

### 4.3.2 The iterated process evolution

Any sequence  $t[0; k]$  such that  $t_0 = 0$  can be encoded by the pair  $C[t] := (g[k], \tau)$  formed by the gaps sequence of  $t$ , and the “labelling permutation”  $\tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$ , so that

$$t_i = \bar{g}_{\tau(i)} - \bar{g}_{\tau(0)}, i \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (4.13)$$

Of course, thanks to (4.13), the decoding  $t = C^{-1}((g[k], \tau))$  is well defined too (given that  $t_0 = 0$ ). Follows from (4.13) again, that  $t_{\tau^{-1}(i)}$  is non decreasing in  $i$  and then for any  $i$  we have

$$\hat{t}_i = t_{\tau^{-1}(i)} = \bar{g}_i - \bar{g}_{\tau(0)}. \quad (4.14)$$

The Markov kernel of the MC  $n \mapsto (I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  can be made explicit at the level of the encodings. Consider  $t[0; k]$  with  $t_0 = 0$  and  $C[t] := (g[k], \tau)$  its encoding, and  $t'[0; k]$  with  $t'_0 = 0$  and  $C[t'] := (g'[k], \tau')$  its encoding. Denote by

$K$  the corresponding Markov kernel (with transparent convention) which gives the distribution of  $C[I^{(n+1)}]$  knowing  $C[I^{(n)}]$ . We have

$$\{X(t_i) \in dt'_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\} = \left\{X(\widehat{t}_i) \in dt'_{\tau^{-1}(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\right\}$$

and then using (4.9), (4.14) and  $t'_i = \overline{g'}_{\tau'(i)} - \overline{g'}_{\tau'(0)}$  for  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} K_{g[k],\tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau'] &= P(X(t_i) \in dt'_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket) \\ &= \prod_{i=1}^k \Phi_{\Delta \widehat{t}_i}(\Delta t'_{\tau^{-1}(i)}) \\ &= \prod_{i=1}^k \Phi_{g_i}(\Delta \overline{g'}_{\tau'(\tau^{-1}(i))}). \end{aligned}$$

We rewrite more simply as

$$K_{g[k],\tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau' \circ \tau] = \prod_{i=1}^k \Phi_{g_i}(\Delta \overline{g'}_{\tau'(i)}) \quad (4.15)$$

from what we observe that

$$K_{g[k],\tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau' \circ \tau] = K_{g[k],Id}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau'] \quad (4.16)$$

and then the LHS is independent of  $\tau$ . Of course, all of this is valid for  $\tau, \tau' \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$ , and for positive  $g_i$ 's,  $g'_i$ 's.

### 4.3.3 Asymptotic independence of labelling permutation and gaps sequence

We explain now why in the encoding Markov chain  $(C[I^{(n)}[k], n \geq 1]$ , the gaps sequence “becomes progressively” independent from the labelling permutation as stated in the main convergence theorems of the paper, where this appears under the form of exchangeability of the limiting distribution  $\gamma_k$ . The asymptotic exchangeability can be proved directly (see [CK14] or the end of Section 4.5.3). It is somehow quite complex since it relies on the convergence of  $(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  to a limit independent of the  $t_i$ 's, and the proof relies on some (classical but) involved estimates.

We present here an other argument which makes this more apparent and which, we think, can be of some interest if ones tries to iterate some processes for which the arguments developed in Section 4.5.3 fail.

It is a coupling argument. For a fixed pair  $(g[k], \tau)$ , consider (using (4.16)),

$$\begin{aligned} \underline{K}_{g[k], \tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau''] &= \min_{\tau'} K_{g[k], \tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau' \circ \tau] \\ &= \min_{\tau'} K_{g[k], Id}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau'] \end{aligned}$$

the “minimal flow” going to  $[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau']$  from  $(g[k], \tau)$ , minimum taken on the  $\tau' \in \mathcal{S}[[0, k]]$ .

In general  $\underline{K}$  is a defective Markov kernel. Since it does not depend on  $\tau''$ , the marginal restriction of  $\underline{K}$  to the permutation labelling, is the uniform distribution on  $\mathcal{S}[[0, k]]$ .

Therefore,  $\underline{K}_{g[k], \tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau'']$  possesses a simpler form:

$$\underline{K}_{g[k], \tau}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau''] = \kappa_{g[k]}(dg'_1, \dots, dg'_k) \frac{1_{\tau'' \in \mathcal{S}[[0, k]]}}{(k+1)!} \quad (4.17)$$

where  $\kappa$  is a defective Markov kernel on  $\mathbb{R}^{+k}$ . Let

$$q(g[k]) = \kappa_{g[k]}(\mathbb{R}^{+k})$$

be the total mass of  $\underline{K}_{g[k], \tau}$  and of  $\kappa_{g[k]}$ . (Notice that the cases treated in the present paper, for  $g[k] \in (0, \infty)^k$ ,  $q(g[k]) > 0$ .) Now set

$$\begin{cases} K_{g[k], \tau}^{[1]}[(dg'_1, \dots, dg'_k), \tau' \circ \tau] = \frac{\kappa_{g[k]}(dg'_1, \dots, dg'_k)/(k+1)!}{q(g[k])} \\ K_{g[k], \tau}^{[2]} = \frac{K_{g[k], \tau} - q(g[k])K_{g[k], \tau}^{[1]}}{1 - q(g[k])} \end{cases} \quad (4.18)$$

so that  $K^{[2]}$  is indeed a Markov kernel. It is easily seen that the initial kernel  $K$  can be represented as

$$K_{g[k], \tau} = q(g[k])K_{g[k], \tau}^{[1]} + (1 - q(g[k]))K_{g[k], \tau}^{[2]},$$

which is the core of our coupling: to sample the MC  $C[I^{(n)}]$  from  $(g[k], \tau)$ , first, sample a Bernoulli random variable with parameter  $q(g[k])$ . If it is 1, then use the kernel  $K^{[1]}$ , else the kernel  $K^{[2]}$ . If the kernel  $K^{[1]}$  is used, the new value  $(G[k+1], \tau_{k+1})$  has the following property:  $\tau_{k+1}$  is uniform and independent from  $G[k+1]$ , which has distribution  $\kappa_{g[k]}(\cdot)/q(g[k])$ .

Then as soon as a transition  $K^{[1]}$  is used the labelling permutation and the gaps sequence become independent, and this independence continues, since by  $K$  the labelling permutation evolves somehow independently from the current labelling permutation (and it evolves by product, see (4.16)). It remains to say some words about

the frequency of these renewal events: letting  $C[I^{(n)}] = (G[k]^{(n)}, \tau_n)$  the successive values of the encoding chain, one sees that each time the renewal probability is  $q(G[k]^{(n)})$ . To get renewal with probability one in the sequence  $C[I^{(n)}]$  we need not much: continuity and positivity of the kernel on each compact, and tightness of the sequence  $C[I^{(n)}]$ .

#### 4.4 Iteration of Brownian processes

This section is devoted to our results concerning the iterated BM ad libitum, iterated reflected BM ad libitum, and  $n$ th iterated BM. We will consider iteration of standard linear Brownian motion, but using Remark 4.5.1 iteration of Brownian motions multiplied by a constant can be studied as well.

We start with a key point relative to the description of the Markov kernel of the gaps sequence MC when  $X$  is a BM (but many of what follows is valid for more general Gaussian processes). In this section,  $\Phi_g$  is the density of the centered Gaussian distribution with variance  $g$ . We denote further by  $\text{Exp}[\lambda, x] = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$  the density of  $\text{Expo}[\lambda]$ , the exponential distribution with parameter  $\lambda$ . Let  $\text{MEX}_k$  be the set of probability measures on  $\mathbb{R}^k$  having a density of the form

$$f(x[k]) = \int_{\mathbb{R}^{+k}} \left( \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i] \right) d\mu(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad x[k] \in \mathbb{R}^k \quad (4.19)$$

where  $\mu$  is a general probability distribution on  $\mathbb{R}^{+k}$ , called the parameter law of  $f$ . In other words, the set  $\text{MEX}_k$  is the set of mixtures of product of exponential distributions. The key result in this section, valid only in the Gaussian case, is the following proposition.

**Proposition 4.4.1.** *For any  $k \geq 1$ ,  $\text{Op}_k$  is linear on  $\text{MEX}_k$ , and then  $\text{MEX}_k$  is stable by  $\text{Op}_k$ .*

*Proof.* We start by the one-dimensional case for which (4.11) holds.

Let  $f_1(x) = \text{Exp}[\lambda, x]$ , and let us find  $\text{Op}_1(f_1)(x)$  by computing its Fourier transform

$$FT_0(a) = \int_{x \geq 0} e^{iax} \int_{g > 0} 2\Phi_g(x) \lambda e^{-\lambda g} dg dx.$$

This is done in two steps:  $\text{Op}_1(f_1)$  is the density of a positive r.v.  $Z$ . Hence

$$FT_1(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} \int_{g > 0} 2\Phi_g(x) \lambda e^{-\lambda g} dg dx,$$

is the Fourier transform of  $\varepsilon Z$  where  $\varepsilon$  is a uniform random sign, independent of  $Z$ . By Fubini, one finds that it is  $\int_{g \geq 0} \lambda e^{-\lambda x} e^{-ga^2} dg = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{2\lambda}}$ , which is the Fourier transform of  $\varepsilon Y$  where  $Y$  has distribution  $\text{Expo}[\sqrt{2\lambda}]$ . We deduce the identity

$$\int_0^{+\infty} \text{Exp}[\lambda, x] \Psi_g(x) dg = \text{Exp}[\sqrt{2\lambda}, x], \quad x > 0. \quad (4.20)$$

In words,  $\text{Op}_1$  sends  $x \mapsto \text{Exp}[\lambda, x]$  on  $x \mapsto \text{Exp}[\sqrt{2\lambda}, x]$ .

*Remark 4.4.2.* Notice that this implies that  $\text{Exp}[2]$  is stable by  $\text{Op}_1$ . This is the result by Curien-Konstantopoulos [CK14] who proved that  $I_1 \sim \varepsilon Y$  where  $Y \sim \text{Expo}[2]$ .

Assume  $k \geq 1$  now. Observe the effect of  $\text{Op}_k$  on a product of exponential distributions. By (4.20) and (4.11), one has for any  $x[k] \in (0, +\infty)^k$ , any  $\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]$ , the identity

$$\sum_{\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]} \int_{\mathbb{R}^{+k}} \prod_{i=1}^k \left( \text{Exp}[c_i, g_i] \Phi_{g_i}(\Delta \bar{x}_{\tau(i)}) \right) dg_1 \dots dg_k = \sum_{\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\sqrt{2c_i}, |\Delta \bar{x}_{\tau(i)}|]. \quad (4.21)$$

An important fact appears here, fact valid only in the Brownian case: one can separate the variables  $x_i$ 's in the right hand side and let appear a product of independent  $\text{Expo}[c'_i]$  r.v., thanks to the two following identities

$$\begin{cases} \text{Exp}[c, x + x'] = \frac{1}{c} \text{Exp}[c, x] \text{Exp}[c, x'], \\ \text{Exp}[c, x] \text{Exp}[c', x] = \frac{c c'}{c + c'} \text{Exp}[c + c', x]. \end{cases} \quad (4.22)$$

Let us separate the variables, and for this, collect in  $E_{\tau, i}$  the contribution relative to  $\text{Exp}[\cdot, x_i]$ .

Since  $\bar{x}_{\tau(j)} = x_1 + \dots + x_{\tau(j)}$ , then  $|\Delta \bar{x}_{\tau(j)}| = x_{1 + \min(\tau(j), \tau(j-1))} + \dots + x_{\max(\tau(j), \tau(j-1))}$ . Let  $E_{\tau, i} = \{j : x_i \in |\Delta \bar{x}_{\tau(j)}|\} = \{j : \min(\tau(j), \tau(j+1)) < i \leq \max(\tau(j), \tau(j+1))\}$  be the sequence of indices  $j$  such that  $x_i$  appear in  $|\Delta \bar{x}_{\tau(j)}|$ . Further, let

$$w_\tau(c[k]) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k \frac{\sqrt{2c_i}}{F_{\tau, i}(c)}$$

and  $F_\tau(c[k]) = (F_{\tau, i}(c[k]), i \in [[1, k]])$  where

$$F_{\tau, i}(c[k]) = \sum_{j \in E_{\tau, i}} \sqrt{2c_j}. \quad (4.23)$$

As a consequence of the previous discussion,

**Lemme 4.4.3.** *If  $f$  is the map  $f(x[k]) = \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i]$  for some fixed  $\lambda[k] \in (0, +\infty)^k$ , then*

$$\text{Op}_k(f)(x[k]) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]} w_\tau(\lambda[k]) \prod_{i=1}^k \text{Exp}[F_{\tau, i}(\lambda), x_i].$$

Of course, this ends the proof of Proposition 4.4.1.  $\square$

In the 2-dimensional case, the 6 functions  $F_\tau$  and weights are the following

$$\begin{aligned} F_{(0,1,2)}(c_1, c_2) &= (s_1, s_2), \quad w_{(0,1,2)}(c_1, c_2) = 1/4, \\ F_{(0,2,1)}(c_1, c_2) &= (s_1, s_1 + s_2), \quad w_{(0,2,1)}(c_1, c_2) = 1/4 \quad s_2/(s_1 + s_2), \\ F_{(1,0,2)}(c_1, c_2) &= (s_1 + s_2, s_2), \quad w_{(1,0,2)}(c_1, c_2) = 1/4 \quad s_1/(s_1 + s_2), \\ F_{(1,2,0)}(c_1, c_2) &= (s_2, s_1 + s_2), \quad w_{(1,2,0)}(c_1, c_2) = 1/4 \quad s_1/(s_1 + s_2), \\ F_{(2,0,1)}(c_1, c_2) &= (s_1 + s_2, s_1), \quad w_{(2,0,1)}(c_1, c_2) = 1/4 \quad s_2/(s_1 + s_2), \\ F_{(2,1,0)}(c_1, c_2) &= (s_2, s_1), \quad w_{(2,1,0)}(c_1, c_2) = 1/4, \end{aligned}$$

where for short, we have written  $s_i$  instead of  $\sqrt{2c_i}$ . We now move to the consequences in terms of iterated BM ad libitum, reflected BM, and in the case of iterated BM.

#### 4.4.1 Iteration of BM ad libitum

Proposition 4.1.1, ensures the convergence of  $(I^{(n)}(t_i), i \in [[1, k]])$  to  $I[k]$  for any distinct and non zeros  $t_i$ 's, as well as the exchangeability of the limit. Hence  $\mathbf{gaps}(I[k])$  is the limit of the gap MC, and the limit of this MC does not depend on the  $t_i$ 's. The gaps sequence is not sufficient to describe  $I[k]$  even up to a permutation (which would be uniform by exchangeability), since the gaps sequence determines the set of elements of the sequence up to a translation. We present a simple trick which allows one to pass this (apparent) difficulty.

Consider  $I[k+1]$  a  $\mu_{k+1}$  distributed sequence. Take  $U$  a r.v. uniform in  $[[1, k+1]]$  independent from the  $I_i$ 's. By Proposition 4.1.1

$$J[k+1] := (I_i - I_U, i \in [[1, k+1]]) \quad (4.24)$$

is a random sequence with one zero entry (with uniform position), and the rest of its entries has the same distribution as  $(I_i, 1 \leq i \leq k)$ . Moreover,  $\mathbf{gaps}(J[k+1]) = \mathbf{gaps}(I[k+1])$  since translations conserve gaps sequence.

Denote by  $\gamma_k$  be the distribution of  $\mathbf{gaps}(I[k+1])$ . The following proposition, consequence of the previous discussion, allows one to get  $\mu_k$  using  $\gamma_k$ .

**Proposition 4.4.4.** *Consider  $(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  a random vector distributed according to  $\gamma_k$ ,  $U$  a uniform r.v. on  $\llbracket 0, k \rrbracket$  and  $\tau$  a uniform random permutation taken in  $\mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$ , all these r.v. being independent. The following identity holds  $(\overline{G}_{\tau(i)} - \overline{G}_U, 0 \leq i \leq k) \stackrel{d}{=} J[k+1]$ .*

It remains to describe  $\gamma_k$ . The case  $k = 1$  is a consequence of Proposition 4.1.1, see also Remark 4.4.2. For  $k \geq 2$ , this can be obtained by looking at the limit of the gap MC, starting with some initial positive gaps sequence  $g[k]$  since, the gap MC inherits from the initial chain (the iterated BM) the property to possess a limiting distribution, independent from the starting point. Clearly, the initial sequence can be taken random (with values in  $\mathbb{R}^{+k}$ ), for example, one can start with some independent exponential r.v. with parameters  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  and this is what we will do since Proposition 4.4.1 and Lemma 4.4.3 allows one to control exactly the evolution of the distribution of the gaps sequence MC in this case.

Finding the limiting distribution in this case amounts to finding the fixed point of  $\text{Op}_k$ .

From Proposition 4.4.1 and Lemma 4.4.3 one sees that  $\text{Op}_k$  sends an element of  $\text{MEX}_k$  on a weighted sums of elements of  $\text{MEX}_k$ , where the total weight is 1: it is a Markov kernel. It can be better understood if instead of seeing the action of  $\text{Op}_k$  at the level of functions, it is seen at the level of the parameters (the parameters of the involved exponential distributions): consider a (discrete time homogeneous) MC  $(Z^{(n)}[k] = (Z^{(n)}(1), \dots, Z^{(n)}(k)), n \geq 0)$  defined on  $\mathbb{R}^{*k}$  whose kernel  $Q$  is defined, for any Borelian  $A$  of  $\mathbb{R}^k$ , and  $\lambda[k] \in \mathbb{R}^{*k}$  by

$$Q(\lambda[k], A) = \sum_{\tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket} w_{\tau[k]}(\lambda) \delta_{F_{\tau}(\lambda[k])}(A). \quad (4.25)$$

In other words,

$$P(Z^{(n+1)}[k] = F_{\tau}(\lambda[k]) \mid Z^{(n)}[k] = \lambda[k]) = w_{\tau}(\lambda[k]) \text{ for any } \tau \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (4.26)$$

If  $Z^{(n)}[k] \sim \nu$ , denote by  $\nu Q$  the distribution of  $Z^{(n+1)}[k]$ . We can sum up the preceding consideration as follows:

**Proposition 4.4.5.** *Assume that the gaps sequence  $(G^{(n)}(i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  at time  $n = 0$  is a mixture of exponential distributions with density  $g_0$  and parameter law  $\nu^{(0)}$ , then  $\nu^{(0)}Q$  is the parameter law of  $\text{Op}_k(f_0)$ . More generally  $\nu^{(0)}Q^n$  is the parameter law of  $f_n = \text{Op}_k^{(n)}$ , the density of  $(G^{(n)}(i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$ .*

We now conclude by discussing the asymptotic behaviour of the parameter law MC.



**Proposition 4.4.6.** (1)  $Q$  is ergodic in  $[2, 2k^2]^k$  (meaning that for any  $\nu_k^{(0)}$  having its support in  $[2, 2k^2]^k$ ,  $\nu_k^{(0)}Q^n$  converges weakly when  $n \rightarrow +\infty$  to a distribution  $\nu_k$  independent from  $\nu_k^{(0)}$ ).

(2) The probability density  $g$  whose parameter law is  $\nu_k$  is solution to  $\text{Op}_k(g) = g$ .

*Proof.* We prove the two statements. Let  $\mathcal{M}(S)$  be the set of probability measures with support in  $S$ . Since the compact set  $[2, 2k^2]^k$  is stable by any  $F_\tau$ , then  $\mathcal{M}([2, 2k^2]^k)$  is stable by  $Q$ . Take  $\nu_k^{(0)}$  in  $\mathcal{M}([2, 2k^2]^k)$ , and being the parameter law of some function  $f_0$ . Hence, the sequence  $(\nu_k^{(n)} := \nu_k^{(0)}Q^n, n \geq 0)$  possesses an accumulation point  $\nu_k$  in the compact  $\mathcal{M}([2, 2k^2]^k)$ . Consider a converging subsequence, still denoted  $\nu_k^{(n)}$ . Recall that  $\nu_k^{(n)}$  is the parameter law of  $f_n := \text{Op}_k^{(n)}(f_0)$ . For any fixed  $x[k]$ , the map  $\lambda[k] \rightarrow \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i]$  is bounded continuous on  $\mathbb{R}^{+k}$ , therefore  $\nu_k^{(n)} \rightarrow \nu_k$  implies that for any fixed  $x[k] \in (0, +\infty)^k$ ,

$$f_n(x[k]) = \int \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i] d\nu_k^{(n)}(\lambda[k]) \rightarrow f(x[k]) := \int \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i] d\nu_k(\lambda[k]). \quad (4.27)$$

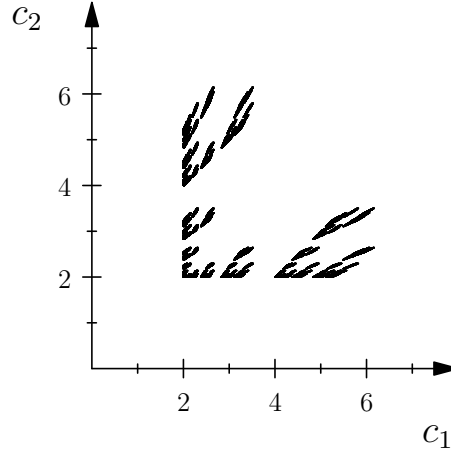
The fact that  $f$  is a density can be checked by Fubini. Denote by  $\eta_n$  the distribution on  $\mathbb{R}^k$  whose density is  $f_n$  and by  $\eta$  the one whose density is  $f$ . By Scheffé's theorem, the simple convergence (4.27) implies the convergence of  $\eta_n$  to  $\eta$ .

This implies  $\eta = \gamma_k$  (by uniqueness of the limit of the gaps sequence Markov chain), and then  $f$  coincides with  $\lim_n \text{Op}_k^{(n)}(f_0)$ . By Proposition 4.4.5,  $f$  is the density of  $\gamma_k$ . We must add that a function  $f$  in MEX possesses a unique parameter law, which implies that  $\nu_k^{(0)}Q^n$  possesses a unique accumulation point, and then converges in distribution. The uniqueness of the parameter law comes from (4.19), where one sees that if  $\nu$  is the parameter law of  $f$ , then  $f$  is the Laplace transform of the measure  $(\prod_{i=1}^k \lambda_i) \nu(\lambda[k])$ .  $\square$

*Remark 4.4.7.* Take a bounded continuous function  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Our representation of the gaps sequence distribution of IBM permits to calculate  $E[f(G[k])]$  under  $\gamma_k$  and to give a representation using  $\nu_k$  only:

$$E[f(G[k])] = \int_{\mathbb{R}_+^k} f(x[k]) d\gamma_k(x[k]) \quad (4.28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^k} \left( \int_{\mathbb{R}_+^k} f(x[k]) \prod_{j=1}^k \lambda_j e^{-\lambda_j x_j} dx_j \right) d\nu_k(\lambda[k]) \quad (4.29)$$

Figure 4.1 – The support of  $\nu_2$  computed by a program.

hence, it appears clearly that  $E[f(G[k])]$  can be computed thanks to the parameter distribution  $\nu_k$  only. More generally, using Proposition 4.4.4, one can use this formula to compute  $E[f(I[k])]$  too, which can then also be expressed in terms of  $\nu_k$  only.

MCs with kernel such as  $Q$ , that is, which relies on successive applications of a functions  $F_\tau$ , where  $F_\tau$  is taken at random in a set of functions  $\mathcal{F} = (F_\tau, \tau \in \mathcal{S}[[0, k]])$  depending (or not) of the current position, are called iterated function system (IFS) in the literature [BD85, BDES88, Fal04].

Here since  $\Theta_k^{(0)} := [2, 2k^2]^k$  is stable by all the  $F_\tau$  (for  $\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]$ ), it is easily seen that for

$$\Theta_k^{(n)} := \bigcup_{\tau \in \mathcal{S}[[0, k]]} F_\tau(\Theta_k^{(n-1)}),$$

the sequence  $(\Theta_k^{(n)}, n \geq 0)$  is a sequence of non increasing compact sets whose (non empty) limit is a compact  $\Theta_k$ . Using the portmanteau theorem and the fact that  $n \mapsto \Theta_k^{(n)}$  is decreasing for the inclusion partial order (see Figure 4.1 for a representation of  $\Theta_2$ ) we can establish that for any  $k \geq 1$ ,  $\Theta_k \supset \text{Support}(\nu_k)$ .

**Lemme 4.4.8.**  $\Theta_2 = \text{support}(\nu_2)$ .

*Proof.* For  $k = 2$ , it is easily seen that all the  $F_\tau$  (given in (4.23)) are contracting in  $\mathbb{R}^2$  equipped with the Euclidean distance. Following classical theorems (e.g. Hutchinson [Hut81, section 3]) it turns out that  $\Theta_k^{(n)}$  converges to  $\Theta_k$  for the Hausdorff metric for any starting set  $\Theta^{(0)} \subset [2, 8]^2$  (and not only from  $[2, 8]^2$  as stated above). In particular, imagine that  $\Theta_2^{(0)} = \{(2, 2)\}$ , and that the starting measure is  $\nu^{(0)} = \delta_{(2,2)}$ . Recall

that  $\nu^{(n)} \rightarrow \nu_2$  (since the convergence of  $\nu^{(n)} \rightarrow \nu_2$  holds for any starting distribution  $\nu^{(0)}$  whose marginals own no atom at 0).

Take any  $x \in \Theta_2$ , any  $\varepsilon > 0$ . By Hutchinson's result, for  $n$  large enough  $\Theta_2^{(n)} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ , which means, taken into account the positivity of the  $w'_\tau$ 's, that  $\nu^{(0)}Q^n(B(x, \varepsilon)) > 0$ : some mass has been transported in a neighbourhood of  $x$  in  $n$  steps from  $(2, 2)$ . This is a first step in our proof that  $x \in \text{Support}(\Theta_2)$ . Now, observe that for any  $\rho > 0$ , there exists  $m \geq 1$  such that

$$F_{0,1,2}^{\circ m}([2, 8]^2) \subset B((2, 2), \rho),$$

implying that  $m$  iterations of  $F_{0,1,2}$  (see (4.23)), bring back all the mass (that is 1) in a neighbourhood of  $(2, 2)$ . The probability to proceed to these iterations of  $F_{0,1,2}$  is positive (since  $\inf_{(c_1, c_2) \in [2, 8]^2} w_{0,1,2}(c_1, c_2) > 0$ ). Now, since all the functions  $F_\tau$  are uniformly continuous on the compact  $[2, 8]$ , for  $\rho$  small enough, any distribution  $\nu^{(0)'$  with support included in  $B((2, 2), \rho)$  will also satisfy  $\nu^{(0)'}Q^n(B(x, 2\varepsilon)) > 0$ .  $\square$

*Remark 4.4.9.* Hutchinson [Hut81, section 3] characterises the set  $\Theta_2$ : it is the closure of the set of fixed points of the functions  $(F_{\tau_1} \circ \dots \circ F_{\tau_m}, m \geq 1, \tau_i \in \mathcal{S} \llbracket 0, 2 \rrbracket)$ .

Using [BDES88] and some analysis, for  $k = 3$ , the IFS with place-dependent probabilities is contracting in average for the  $\|\cdot\|_2$  distance. This can be proved by computing the Jacobian matrices  $J_\tau(c[k]) = \left( \frac{\partial F_{\tau,i}(c[k])}{\partial c_j} \right)_{1 \leq i \leq k}$  of the  $F_\tau$ 's, and by proving that their norms  $N_\tau(c[k]) := \sup_{\rho \neq 0} \|\rho J_\tau(c[k])\|_2 / \|\rho\|_2$  satisfies

$$\sum_{\tau} w_\tau(c[k]) \log(N_\tau(c[k])) < 0$$

(this can be proved by taking first some bounds on the  $w_\tau$ , and then using the  $\log(N_\tau(c[k])) \leq \log(N_\tau(2, \dots, 2))$ ). From Theorem 1.2 in [BDES88],  $\nu_3$  is of pure type, atomic, or absolutely continuous.

We think that the same results can be proved with additional work for  $k = 4$ , but for  $k \geq 5$ , other methods should be involved since the average contraction property seems to fail. We were not able to find in the literature any general results allowing one to prove the identification of  $\Theta_k$  with  $\text{Support}(\mu_k)$  or to compute the Hausdorff dimension of this support. We conjecture that for any  $k \geq 1$ ,  $\text{Support}(\nu_k)$  coincides with  $\Theta_k$ .

Now, we describe the distribution of the gaps sequence of the IBM thanks to  $\nu_k$ .

**Theorem 4.4.1.** *Let  $k$  be an integer larger than 0. If  $(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  is a random vector with distribution  $\gamma_k$ , then*

$$(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket) \stackrel{d}{=} (C_1 E_1, C_2 E_2, \dots, C_k E_k) \quad (4.30)$$

where the  $E_i$ 's are i.i.d.,  $\text{Expo}[1]$  distributed, independent from  $C[k]$ , a random vector of law  $\nu_k$ .

According to this theorem and Proposition 4.4.6, we may deduce the following multivariate stochastic order bounds for  $\gamma_k$ , which somehow, describe the repulsive-attractive property of the gaps sequence.

**Proposition 4.4.10.** *Let  $k$  be an integer larger than 0 and  $(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  a random vector with distribution  $\gamma_k$ . For any bounded increasing function  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$*

$$E[h(E_i/(2k^2), 1 \leq i \leq k)] \leq E[h(G_i, 1 \leq i \leq k)] \leq E[h(E_i/2, 1 \leq i \leq k)]$$

where the  $E_i$  are i.i.d. random variables  $\text{Expo}[1]$  distributed.

We can add here that the bound  $2k^2$  is not tight (even in the case  $k = 2$  as one can see on Figure 4.1).

#### 4.4.2 Iteration of reflected BM ad libitum

In this section  $X = |B|$  is the reflected BM (RBM), and  $I^{(n)} = X_n \circ \dots \circ X_1$  the  $n$ th iterated RBM.

**Proposition 4.4.11.** *Let  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k$  be some non negative distinct real numbers. The sequence*

$$(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (0, I_1, \dots, I_k)$$

where  $(I_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  is invariant by permutation and independent from the  $t_i$ 's and takes its value in  $(0, +\infty)^k$ . Moreover we have  $I_1 \sim \text{Expo}[2]$ .

Hence, the gaps sequence  $\text{MC}(\text{gaps}(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket), n \geq 1)$  converges and its limit  $(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket) := \text{gaps}(0, I_1, \dots, I_k)$  determine  $(0, I_1, \dots, I_k)$ : for a uniform permutation  $\tau \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket$  independent from  $(G_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$ ,

$$I[k] \stackrel{d}{=} (\overline{G}_{\tau(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket).$$

The proof of this proposition can be adapted from the proof of Theorem 4.5.1. All these results rely on the ergodicity of the Markov chain  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$ . The estimates needed to deal with the reflected Brownian case can be simply adapted from the simple Brownian case.

We now describe the limiting gaps sequence using again the MC at the parameters level.

First, the Markov kernel of the iterated BM has a density. Set, for any  $g, x, y \geq 0$ ,  $M_g(x, y) = P(B_{t+g} \in dy | B_t \in dx)$ . We have, by André's reflection principle,

$$M_g(x, y) = (\Phi_g(y - x) + \Phi_g(y + x)) 1_{y \geq 0} \quad (4.31)$$

where  $\Phi_g$  is the density of  $B_g$ .

The gap MC kernel can be described too adapting consideration of Section 4.4 (in words, 0 stay at the left). Starting with some gaps sequence **gaps** ( $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = g[k]$ ), we will have **gaps** ( $X(t_0) = 0, X(t_1), \dots, X(t_k) = x[k]$ ), if, for the same notation as in (4.3), for  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $X(\widehat{t}_i) = \bar{x}_{\tau(i)}$  for some permutation  $\tau \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket$  (instead of  $\llbracket 0, k \rrbracket$  for the iterated BM). We then have in this case a solid link between the Markov kernel of the gaps sequence and of the initial chain, since  $\widehat{t}_j = \sum_{i=1}^j g_i$ . We get in this case

$$\Psi_{g[k]}(x[k]) = \sum_{\tau \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket} \prod_{i=1}^k M_{g_i}(\bar{x}_{\tau(i-1)}, \bar{x}_{\tau(i)}) 1_{x_i > 0}. \quad (4.32)$$

Therefore, modifying a bit (4.21), one can still see that **MEX** is stable by the MC with kernel  $\Psi_k$ . One observes using (4.20), (4.11),

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, g_i] \Psi_{g[k]}(x[k]) dg_1 \dots dg_k \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{\tau \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket} \prod_{i=1}^k \text{Exp} \left[ \sqrt{2\lambda_i}, |\bar{x}_{\tau(i)} - \bar{x}_{\tau(i-1)}| \right] + \text{Exp} \left[ \sqrt{2\lambda_i}, |\bar{x}_{\tau(i)} + \bar{x}_{\tau(i-1)}| \right]. \end{aligned}$$

After expanding this product, one can again put together the elements “containing a given”  $x_i$ . Using the same considerations as those below Remark 4.4.2, this is also

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{\tau \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{D \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \prod_{i \in D} \text{Exp} \left[ \sqrt{2\lambda_i}, |\bar{x}_{\tau(i)} - \bar{x}_{\tau(i-1)}| \right] \prod_{i \in \mathbb{C}D} \text{Exp} \left[ \sqrt{2\lambda_i}, |\bar{x}_{\tau(i)} + \bar{x}_{\tau(i-1)}| \right].$$

This formula is the analogous in the case of RBM to that on the BM, (4.21). Let  $E_{\tau, i}$  as defined in Section 4.4, and

$$\begin{aligned} E'_{\tau, i} &= \{j : x_i \in |\bar{x}_{\tau(j)}|\} = \{j : \tau(j) \geq i\} \\ E''_{\tau, i} &= \{j : x_i \in |\bar{x}_{\tau(j-1)}|\} = \{j : \tau(j-1) \geq i\}. \end{aligned}$$

Set

$$F_{\tau, D, i}(c[k]) = \sum_{j \in D, j \in E_{\tau, i}} \sqrt{2c_j} + \sum_{j \in \mathbb{C}D, j \in E'_{\tau, i}} \sqrt{2c_j} + \sum_{j \in \mathbb{C}D, j \in E''_{\tau, i}} \sqrt{2c_j}$$

and

$$w_{\tau,D}(c[k]) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k \frac{\sqrt{2c_i}}{F_{\tau,D,i}(c[k])}.$$

Again let

$$F_{\tau,D} = (F_{\tau,D,i} : 1 \leq i \leq k).$$

Similarly to Lemma 4.4.3 we have

**Lemme 4.4.12.** *If  $f$  is the function  $f(x[k]) = \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, x_i]$  for some  $\lambda[k] \in (0, +\infty)^k$ , then*

$$\text{Op}_k(f)(x[k]) = \sum_{D \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{\tau \in \mathcal{S}[\llbracket 0, k \rrbracket]} w_{\tau,D}(\lambda[k]) \prod_{i=1}^k \text{Exp}[F_{\tau,D,i}(\lambda), x_i].$$

As in the iterated Brownian motion case, to this operator one can associate a Markov chain  $Z^{(n)}$  with kernel  $Q$  (defined as (4.25)) at the level of the parameters (see also (4.26)). Again, the Markov chain  $Z^{(n)}$  stays eventually confined in a compact region of  $\mathbb{R}^{+k}$  (the compact  $[2, 18k^2]^k$  is conserved by each of the  $F_{\tau,D}$ ). By the same considerations as that of Section 4.4, Proposition 4.4.6 holds for the present case (with  $[2, 18k^2]^k$  instead of  $[2, 2k^2]^k$ ). The analogous of Theorem 4.4.1 holds too, for  $\nu_k$  the fixed point of  $Q$ , and Proposition 4.4.10 too, with  $18k^2$  instead of  $2k^2$  (again  $18k^2$  is not tight).

#### 4.4.3 nth iteration of the BM

In the literature, the standard iterated Brownian motion corresponds to our process  $I^{(2)}$ . It has been deeply studied. It permits to construct solutions to partial differential equations [Fun79]. Burdzy studied some of its sample paths properties [Bur93]. Lot of results have been obtained around its probabilistic and analytic properties, see [Bur93, Ber96, ES99, BK95, Xia98, KL99] and the references therein. The  $n$ th IBM permits to construct solutions of differential equations [OB09], but they are less studied, only [Ber96] mentioned that his result can be extended to  $n$ th IBM. As far as we are aware of, there are no result concerning some description of the finite dimensional distributions of this process. In the sequel, we show that our gaps point of view allows one to give (a non trivial) description of them, but sufficiently simple to make some exact computations for small values of  $n$  and  $k$ .

Let  $n \geq 1$  be fixed, as well as  $(t_0 = 0, t_1, \dots, t_k)$  some distinct numbers. The aim of this part is to describe the distribution of  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$ , where  $I^{(n)} = B_n \circ \dots \circ B_1$ , where the  $B_i$  are i.i.d. two sided BM.

We build our reflection on the considerations presented in Section 4.3.2. Start with formula (4.15) which expresses the encoding Markov chain kernel. Here, of course,  $\Phi_g$  is the Gaussian density. Again, by (4.20)

$$\int \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i, g_i] K_{g[k], \tau}((g'_1, \dots, g'_k), \tau' \circ \tau) dg_1 \dots dg_k = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k \text{Exp} \left[ \sqrt{2\lambda_i}, |\Delta \bar{g}'_{\tau'(i)}| \right]. \quad (4.33)$$

Thanks to (4.22), we can again rewrite the right hand side to code the evolution on the parameter space. Setting  $m_i = \min\{\tau'_{i-1}, \tau'_i\}$  and  $M_i = \max\{\tau'_{i-1}, \tau'_i\}$  we get  $|\Delta \bar{g}'_{\tau'_i}| = g'_{1+m_i} + \dots + g'_{M_i}$ . Once again, collect the different contribution: set  $E_j(\tau, \tau') = \{i : j \in \llbracket m_i + 1, M_i \rrbracket\}$  the set of indices  $i$  such that  $g'_j$  contributes to  $|\Delta \bar{g}'_{\tau'(i)}|$ . The RHS of (4.33) rewrites

$$w_{\tau, \tau'}(\lambda[k]) \prod_{j=1}^k \text{Exp} [F_{\tau, \tau', j}(\lambda), g'_j].$$

where

$$w_{\tau, \tau'}(\lambda[k]) = \frac{1}{2^k} \prod_{j=1}^k \frac{\prod_{i \in E_j(\tau, \tau')} \sqrt{2\lambda_i}}{\sum_{i \in E_j(\tau, \tau')} \sqrt{2\lambda_i}} \text{ and } F_{\tau, \tau', j}(\lambda[k]) = \sum_{i \in E_j(\tau, \tau')} \sqrt{2\lambda_i}.$$

Consider  $\text{MEX}'_k$  the set of measures that are mixtures of distribution on  $\mathbb{R}^k \times \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$  of the type  $\left( \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i] \right) \times \delta_\tau$  where  $\delta_\tau$  is a Dirac on a permutation  $\tau$ . The previous considerations show that the kernel  $K$  operates linearly on  $\text{MEX}'_k$ . It sends  $\left( \prod_{i=1}^k \text{Exp}[\lambda_i] \right) \times \delta_\tau$  on

$$\sum_{\tau'} w_{\tau, \tau'}(\lambda[k]) \left( \prod_{i=1}^k \text{Exp} [F_{\tau, \tau', j}(\lambda[k]), g'_j] \right) \times \delta_{\tau' \circ \tau}.$$

This can again be written at the parameter level under the form of a time homogeneous MC on  $\mathbb{R}^k \times \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$ , which, starting at time 0 at position  $(\lambda[k], \tau)$ , takes at time 1, the value  $((F_{\tau, \tau', j}(\lambda[k]), 1 \leq j \leq k), \tau' \circ \tau)$  with probability  $w_{\tau, \tau'}(\lambda[k])$  (for any  $\tau' \in \mathcal{S} \llbracket 0, k \rrbracket$ ). Denote again by  $Q$  the corresponding kernel.

This explicit description allow computations for small values of  $k$  and of  $n$ . Recall at the beginning of Section 4.3.2 the decoding map  $C^{-1}$ . Finally denoting by  $\mathbb{E}_{\lambda[k], \tau}$

the expectation when the initial encoding distribution is  $(\prod_{i=1}^n \text{Exp}(\lambda_i)) \times \delta_\tau$ , we find

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\lambda[k], \tau}(f(I^{(n)}[k])) &= \sum_{\tau'} \int_{R^+{}^k} Q_{(\lambda[k], \tau)}^n([d\lambda'_1, \dots, d\lambda'_k], \tau' \circ \tau) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^k} f(C^{-1}(y[k], \tau' \circ \tau)) \left( \prod_{i=1}^n \text{Exp}[\lambda'_i, y_i] \right) dy_1 \dots dy_k. \end{aligned}$$

The LHS appears to the Laplace transform of  $f(I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k))$  with respect to the initial gaps sequence, and then it characterises the distribution. This is not a simple description, but we think that it is the simplest representation of the finite dimensional distribution of the iterated BM one can find.

## 4.5 Stable processes iterated ad libitum

### 4.5.1 Main results

In this section, we consider independent two sided-stable processes  $X_1, X_2, \dots$  with parameters  $(\alpha, \sigma, r)$  as defined in Section 4.2, and their successive iterations  $I^{(n)} = X_n \circ \dots \circ X_1$ . In this section,  $\Phi_g$  is no more the Gaussian density but the density of  $X_1(g)$ .

Two sided stable processes possess independent and stationary increments, as well as a scaling property which makes their iterations very similar to that of BM (general Lévy processes seem more difficult to handle because of the non-scaling property). Here are the convergence results we get for iterated stable processes  $I^{(n)}$ , as described in Section 4.2.

**Theorem 4.5.1.** *Assume  $\sigma \in (0, +\infty)$ . Take  $k, n \geq 1$  and some non zero  $t_1, \dots, t_k$ . Set,*

$$I^{(n)}[k] := (I^{(n)}(t_1), \dots, I^{(n)}(t_k)).$$

1. *When  $\alpha \leq 1$  and any  $r$ , for any  $t > 0$ ,  $I^{(n)}(t)$  does not converge in distribution in  $\mathbb{R}$ .*
2. *When  $1 < \alpha \leq 2$  and  $|r| > 1$  then  $I^{(n)}(t_1)$  does not converge in distribution in  $\mathbb{R}$ .*
3. *When  $1 < \alpha \leq 2$  and  $|r| < 1$  the MC  $I^{(n)}[k]$  converges in distribution. The limit distribution  $\mu_k$  does not depend on the  $t_i$ 's and is then exchangeable. For  $I[k] \sim \mu_k$ , the equality  $I[k] \stackrel{d}{=} (X(I_1), \dots, X(I_k))$  holds. Moreover,  $(I_2 - I_1, \dots, I_k - I_1) \sim \mu_{k-1}$ .*

*When  $r = 0$ , under  $\mu_1$ ,  $I_1 \stackrel{d}{=} \varepsilon \prod_{i \geq 0} |X(1)^{(i)}|^{1/\alpha^i}$  where the  $X(1)^{(i)}$ 's are i.i.d. copies of  $X(1)$  and  $\varepsilon$  is an independent uniform random sign.*



*Remark 4.5.1.* If  $X$  and  $X'$  are two stable processes with parameters  $(\alpha, 1, 0)$  and  $(\alpha, \sigma, 0)$  for some  $\alpha \in (1, 2]$  and  $\sigma > 0$ , then  $X' \stackrel{d}{=} \sigma X$ . The successive iteration of  $(\alpha, 1, 0)$  and  $(\alpha, \sigma, 0)$  stable processes and limits (if any) can be compared by a simple coupling, but the property fails when  $r \neq 0$ .

*Remark 4.5.2.* Notice that since  $\mu_{k+1}$  is exchangeable, the rank of  $I_1$  in  $I[k+1]$  is uniform. Therefore the (random) number of indices  $\#\{j : 2 \leq j \leq k+1, I_j - I_1 > 0\}$  is uniform in  $\llbracket 0, k \rrbracket$ . In other words, if  $I[k] \sim \mu_k$  the rank of 0 in the list  $(0, I_1, \dots, I_k)$  is uniform.

**Lemme 4.5.3.** *When  $1 < \alpha \leq 2$  and  $|r| < 1$ , the MC  $(G^{(n)}[k], n \geq 1)$  converges in distribution, and the limit distribution does not depend on the initial non-zero state.*

*Proof.* Take some gaps sequence  $g[k] \in \mathbb{R}^{*k}$ . They are the gaps sequence of some non zeros and distinct times  $t_0, t_1, \dots, t_k$ . Start with  $I^{(0)}[k+1] = (t_0, \dots, t_k)$ . Since  $I^{(n)}[k+1]$  converges in distribution to a limit independent from the  $t_i$  (Theorem 4.5.1(3)), then the gaps sequence MC  $G^{(n)}[k] := \mathbf{gaps}(I^{(n)}[k])$  too.  $\square$

Consider the case  $k = 1$  and  $X$  a symmetric stable process for some  $\alpha \in (1, 2]$  and  $r = 0$ . Assume that the gap at time 0 is distributed as  $G$ , at time 1, the gap will be  $|X(G)|$ . Then from the equality  $G \stackrel{d}{=} |X(G)| \stackrel{d}{=} G^{1/\alpha} |X(1)|$  we infer

$$G \stackrel{d}{=} \prod_{i \geq 0} |X(1)^{(i)}|^{\frac{1}{\alpha^i}}, \quad (4.34)$$

where the  $X(1)^{(i)}$  are i.i.d. copies of  $X(1)$  (the complete argument can be adapted from Section 4.5.3). When  $r \neq 0$  there are not any such simple formula.

Let  $\phi$  be the density of  $G$  as defined in (4.34). We have  $\mathbf{Op}_1(\phi) = \phi$ , and  $\int_{g \geq 0} \phi(g) \Psi_g(x) dg = \phi(x)$  is an identification between the densities of  $|X(G)|$  and of  $|G|$ . Using that  $\phi[c, g] := \frac{\phi(g/c)}{c}$  is the distribution of  $cG$ , we get that  $\int_{g \geq 0} \phi[c, g] \Psi_g(x) dg$  is the density of  $|X(cG)| \stackrel{d}{=} c^{1/\alpha} |X(G)| \stackrel{d}{=} c^{1/\alpha} G$ , which density is  $\phi[c^{1/\alpha}, x]$ . All of this can be summed up in

$$\int_{g \geq 0} \phi[c, g] \Psi_g(x) dg = \phi[c^{1/\alpha}, x]. \quad (4.35)$$

Let  $\nu[c]$  the distribution whose density is  $\phi[c, \cdot]$ . The map  $\mathbf{Op}_1$  sends  $\nu[c]$  onto  $\nu[c^{1/\alpha}]$  and is a linear application on the set of mixtures of distributions  $\nu[c]$ . This property which in the Brownian case allowed us to prove that  $\mathbf{Op}_k$  was linear on the set of mixtures of product of exponential distributions can not be extended here. Indeed, to separate the variables in (4.21), we use (4.22). This important property holds

only for exponential distributions, and it turns out that in the stable case, product measures of the form  $\prod_{i=1}^k \phi[c_i, x_i]$  are not sent by  $\text{Op}_k$  on mixtures of measures of the same kind. We were not able to find a family of measures on which  $\text{Op}_k$  would operate simply but the discovery of such a family would be an important step for the identification of the distribution of  $I[k]$ .

#### 4.5.2 Occupation measure in the stable case

As stated in Proposition 4.1.1, Curien and Konstantopoulos [CK14] obtained some information about the occupation measure of the iterated Brownian motion ad libitum. In the stable case, when convergence holds, the family of limiting distributions  $\mu_k$  are consistent, and since, they correspond to distribution of exchangeable vectors, by Kolmogorov extension theorem together with de Finetti representation theorem, there exists a random measure  $\mu$ , so that for any  $k \geq 0$ ,  $\mu_k$  is the distribution of  $(U_1, \dots, U_k)$  i.i.d. random variables taken under  $\mu$  (this is explained in the Brownian case in [CK14]).

The main tool used in [CK14] to characterise the regularity of the density of the occupation measure is a paper by Pitt [Pit78] only available in the Gaussian case. We are not able for the moment to get a similar result in the stable case, and then we pursue our research in this direction. In view of Figure 4.2, we may expect that for some small parameters  $\alpha$  in  $(1, 2]$  (close to 1), the density of the local time should be not positive on the range of its support.

In the next subsection, we discuss the finiteness of the support of the limiting occupation measure. The proof follows the same structure as that of [CK14, Prop. 7]. Let  $P$  be any two-sided real process (in our case  $P = X, I^{(n)}$  or  $I$ ). The range of  $P$  on  $[a, b]$  is defined by

$$R_P(a, b) = \sup_{a \leq t \leq b} P(t) - \inf_{a \leq t \leq b} P(t). \quad (4.36)$$

In the following, set  $D = R_X(0, 1)$ .

**Lemme 4.5.4.** *For any  $|r| < 1$  and  $\alpha \in (1, 2]$ , for almost any  $t \neq 0$ ,  $R_{I^{(n)}}(0, t)$  converges in law to a r.v.  $\Delta$  which does not depend on  $t$ . Moreover, when  $r = 0$ ,*

$$\Delta \stackrel{d}{=} \prod_{i=0}^{\infty} D_i^{\alpha^{-i}} \quad (4.37)$$

where the  $D_i$ 's are i.i.d. copies of  $D$ .

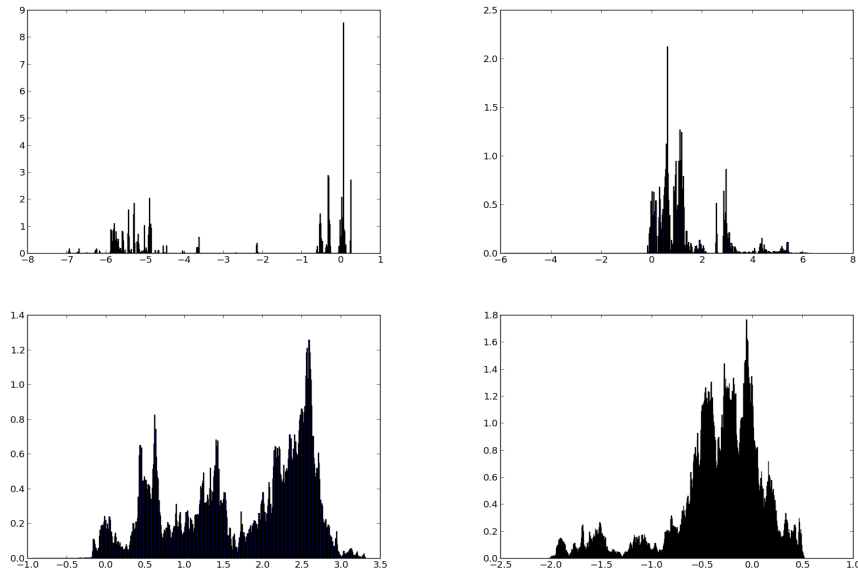


Figure 4.2 – Simulation of the local time of the iterated centered stable processes ad libitum, in the case  $\alpha = 1.2, 1.5, 1.8$  and  $2$ . Each of them is made from an histogram made with a sample  $(X^{(10)}(t_i), 1 \leq i \leq 10^6)$  starting from some fixed position.

*Proof.* Let  $A_n(t) = \inf\{I^{(n)}(u), 0 \leq u \leq t\}$  and  $B_n(t) = \sup\{I^{(n)}(u), 0 \leq u \leq t\}$ . When  $r = 0$ ,

$$\begin{aligned} R_{I^{(n+1)}}(0, t) &= \sup_{A_n(t) \leq v \leq B_n(t)} X(v) - \inf_{A_n(t) \leq v \leq B_n(t)} X(v) \\ &= R_X(A_n(t), B_n(t)) \\ &= (B_n(t) - A_n(t))^{\alpha-1} D \\ &\stackrel{d}{=} (R_{I^{(n)}}(0, t))^{\alpha-1} D. \end{aligned}$$

By iteration, we get

$$R_{I^{(n)}}(0, t) = t^{\alpha-n} \prod_{i=1}^n D_i^{\alpha^{-(i+1)}} \quad (4.38)$$

where  $D_i$  are i.i.d. copies of  $D$ . Since  $\alpha > 1$  and  $t \neq 0$ ,  $t^{\alpha-n} \rightarrow 1$  when  $n \rightarrow \infty$ . Now, we have to prove the convergence in law of  $\prod_{i=0}^{n-1} D_i^{\alpha^{-i}}$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Write

$$\log \prod_{i=0}^{n-1} |D_i|^{\alpha^{-i}} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{-i} \log |D_i|.$$

By the Doob's  $\mathbb{L}^p$  inequality [RY99, Theorem II.1.7], for any  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$P(D \geq x) \leq P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |X(t)| \geq \frac{x}{2}\right) \leq \frac{2^\beta E[X(1)^\beta]}{x^\beta}. \quad (4.39)$$

But,  $E[X(1)^\beta] < \infty$  if  $\beta < \alpha$ . For  $\beta = 1 < \alpha$ ,

$$P(\alpha^{-i} \log |D_i| > i^{-2}) \leq \frac{\text{Cste}}{e^{\alpha^{i-2}}},$$

which is a summable sequence, since  $\alpha > 1$ . By Borel-Cantelli's lemma,  $\prod_{i=1}^n D_i^{\alpha^{-i}}$  converges as  $n \rightarrow +\infty$ . This ends the proof when  $r = 0$ .

In the general case, write

$$R_{I^{(n+1)}}(0, t) = R_X(A_n(t), B_n(t)) \quad (4.40)$$

$$\leq (B_n(t) - A_n(t))^{\alpha-1} D + r(B_n(t) - A_n(t)) \quad (4.41)$$

$$\stackrel{d}{=} (R_{I^{(n)}}(0, t))^{\alpha-1} D + rR_{I^{(n)}}(0, t) \quad (4.42)$$

To prove that  $R_{I^{(n)}}(0, t)$  converges, we use Theorem 13.0.1 in [MT09]. By (4.42),

$$E[R_{I^{(n+1)}}(0, t) | R_{I^{(n)}}(0, t)] - R_{I^{(n)}}(0, t) \leq (R_{I^{(n)}}(0, t))^{\alpha-1} E[D] - (1-r)R_{I^{(n)}}(0, t).$$

So if  $R_{I^{(n)}}(0, t) > \left(\frac{E[D]}{1-r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha^{-1}}} = M$ , then  $E[R_{I^{(n+1)}}(0, t)|R_{I^{(n)}}(0, t)] - R_{I^{(n)}}(0, t) \leq -1$ ; else  $E[R_{I^{(n+1)}}(0, t)|R_{I^{(n)}}(0, t)] - R_{I^{(n)}}(0, t) \leq M^{\alpha^{-1}}E[D] + 1 = b$ , from what we deduce

$$E[R_{I^{(n+1)}}(0, t)|R_{I^{(n)}}(0, t)] - R_{I^{(n)}}(0, t) \leq -1 + b1_{[0, M]}(R_{I^{(n)}}(0, t)). \quad (4.43)$$

This proves the ergodicity of  $(R_{I^{(n)}}(0, t); n \geq 0)$  by [MT09, Theorem 13.0.1(iv)].  $\square$

By Lemma 4.5.4 and the arguments of [CK14, Section 3.2], this proves that  $\phi$  has a bounded support a.s.

### 4.5.3 Proofs of Theorem 4.5.1

The main technical point (Theorem 4.5.1 (3)) concerns the convergence of the MC  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 0, k \rrbracket)$  in the stable case from which we will derive the other convergence theorem of the paper by some slight modifications.

In the proof  $\tilde{X}(1)$  stands for the symmetric part of  $X(1)$  so that  $X(t) \stackrel{d}{=} rt + |t|^{1/\alpha} \tilde{X}(1)$ .

1. Assume  $\alpha < 1$ , and  $r \in \mathbb{R}$ . One has  $I^{(n)}(t) \stackrel{d}{=} rI^{(n-1)}(t) + |I^{(n-1)}(t)|^{1/\alpha} \tilde{X}(1)$ . Since  $1/\alpha > 1$ , it is apparent that  $|I^{(n)}(t)|$  should become very large. To prove this, we compare  $I^{(n)}$  with a deterministic geometric sequence  $c^n$  for  $(1/\alpha) > c > 1$ .

$$P(|I^{(n)}(t)| \geq c^n \mid |I^{(n-1)}(t)| \geq c^{n-1}) \geq \inf_{x \geq c^{n-1}} P(|rx + x^{1/\alpha} \tilde{X}(1)| \geq c^n)$$

For any  $x \geq c^{n-1}$ ,

$$P(|rx + x^{1/\alpha} \tilde{X}(1)| \geq c^n) = 1 - P\left(\frac{-c^n - rx}{x^{1/\alpha}} \leq \tilde{X}(1) \leq \frac{c^n - rx}{x^{1/\alpha}}\right)$$

and since stable distribution possesses continuous density  $h$  at 0 (see Feller [Fel71, sec. XV(3)]), this is

$$\begin{aligned} &\geq 1 - C h(0) \left( \frac{c^n - rx}{x^{1/\alpha}} - \frac{-c^n - rx}{x^{1/\alpha}} \right) \\ &= 1 - C h(0) \left( \frac{2c^n}{x^{1/\alpha}} \right) \\ &\geq 1 - C h(0) \left( \frac{2c^n}{c^{(n-1)/\alpha}} \right) \end{aligned}$$

for  $n$  large enough and some constant  $C > 0$ . We deduce

$$P(|I^{(n)}(t)| \geq c^n, \forall n \geq 1) > 0.$$

When  $\alpha = 1$ , for any  $r$ ,  $I^{(n)}(t) \stackrel{d}{=} rI^{(n-1)}(t) + |I^{(n-1)}(t)|\tilde{X}_1^{(n-1)}$ . As the distribution of  $\tilde{X}_1$  is symmetric with respect to 0,  $(rI^{(n-1)}(t), |I^{(n-1)}(t)|\tilde{X}_1^{(n-1)}) \stackrel{d}{=} (rI^{(n-1)}(t), I^{(n-1)}(t)\tilde{X}_1^{(n-1)})$ , from which we get  $I^{(n)}(t) \stackrel{d}{=} I^{(n-1)}(t)(r + \tilde{X}_1^{(n-1)}) \stackrel{d}{=} t \prod_{i=1}^n (r + \tilde{X}_1^{(i)})$ . Taking the logarithm, one sees that  $I^{(n)}(t)$  does not converge in distribution.

2. The proof we provide here is valid for any  $\alpha > 0$ . In the sequel we assume  $r > 1$  (the case  $r < -1$  is similar). For a fixed  $t$ ,  $I^{(n)}(t) \stackrel{d}{=} rI^{(n-1)}(t) + |I^{(n-1)}(t)|^{1/\alpha}\tilde{X}(1)$ . For  $r > 1$ ,  $I^{(n)}(t)$  can be compared with a geometric sequence with common ratio  $s \in (1, r)$ . Write

$$P(|I^{(n)}(t)| \geq s^n \mid |I^{(n-1)}(t)| \geq s^{n-1}) \geq \inf_{x \geq s^{n-1}} P(|rx + x^{1/\alpha}\tilde{X}(1)| \geq s^n)$$

For any  $x \geq s^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} P(|rx + x^{1/\alpha}\tilde{X}(1)| \geq s^n) &= 1 - P(-s^n \leq rx + x^{1/\alpha}\tilde{X}(1) \leq s^n) \\ &\geq 1 - P(rx + x^{1/\alpha}\tilde{X}(1) \leq s^n) \\ &= 1 - P\left(\tilde{X}(1) \geq \frac{rx - s^n}{x^{1/\alpha}}\right) \\ &= 1 - P\left(\tilde{X}(1) \geq \frac{(r-s)x + sx - s^n}{x^{1/\alpha}}\right) \\ &\geq 1 - P\left(\tilde{X}(1) \geq \frac{(r-s)x}{x^{1/\alpha}}\right) \\ &= 1 - P\left(\tilde{X}(1) \geq (r-s)x^{1-1/\alpha}\right) \\ &\geq 1 - cs^{(n-1)(1-\alpha)} \end{aligned}$$

for  $n$  large enough (we have use that  $P(\tilde{X}(1) \geq v) \leq c'v^{-\alpha}$  for some  $c'$  and  $v \geq s$ , and that  $r-s$  is a constant, and the symmetry of the distribution of  $\tilde{X}(1)$ ). We deduce from that

$$P(|I^{(n)}(t)| \geq s^n, \forall n \geq 1) > 0.$$

3. The proof of the convergence of  $I^{(n)}[k]$  we propose is adapted from Curien & Konstantopoulos [CK14].

The sequence  $(I^{(n)}[k], n \geq 1)$  is a MC, and its Markov kernel is given by

$$P(y[k]; A) = P((X(y_1), \dots, X(y_k)) \in A),$$

for any  $y[k] \in \mathbb{R}^k$ , any Borelian  $A \in \mathbb{R}^k$ . As in [CK14], the Markov chain  $I^{(n)}[k]$  is aperiodic, and irreducible with respect to the  $p$ -dimensional Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^k$ . We prove that it is Harris recurrent (and then possesses a unique invariant distribution), following the elements that can be found in Section 5.5.1. Meyn & Tweedie [MT09]. Set for any  $M > 0$

$$S_M = \{x[k] \in \mathbb{R}^k, M^{-1} \leq |x_i| \leq M, |x_i - x_j| \geq M^{-1}\}.$$

Denote by  $f_{x[k]}$  the density of  $(X(x_1), \dots, X(x_k))$ , and let

$$F_M(z[k]) = \min_{x[k] \in S_M} f_{x[k]}(z[k]).$$

It is easily seen that  $F_M$  is the density of a  $\sigma$ -finite measure  $\mu_M$  on  $\mathbb{R}^k$ , with total mass  $c_M = \int_{\mathbb{R}^k} F_M(z[k]) dz_1 \cdots dz_k > 0$  and satisfy  $F_M(z[k]) > 0$  for any  $z_1, \dots, z_k$ . This provides the following bounds on the Markov kernel of our MC:

$$P((X(x_1), \dots, X(x_k)) \in A) \geq \mu_M(A), \quad \text{for all } x[k] \in S_M.$$

This is the minoration condition (5.2) in [MT09]: the set  $S_M$  is  $\mu_M$ -petite. To prove the Harris recurrence of the MC, it suffices to prove that for some  $M > 0$ , the expected hitting time of  $S_M$  by  $I^{(n)}[k]$  starting from  $x[k]$ , is bounded above for  $x[k] \in S_M$ . Consider, for  $x[k] \in \mathbb{R}^{+k}$

$$V(x[k]) = U(x[k]) + G(x[k])$$

with  $U(x[k]) = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$ ,  $G(x[k]) = \sum_{0 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j|^{-1/\alpha}$  (where  $x_0 = 0$ ). The potential function  $V$  is unbounded on  $\mathbb{R}^k$ , and its drift is defined by

$$DV(x[k]) := PV(x[k]) - V(x[k]) = E[V(X(x_1), \dots, X(x_k))] - V(x[k]), \quad \text{for } x[k] \in \mathbb{R}^k.$$

We just have to prove that

$$\Delta V(x[k]) \leq -a + b1_{S_M}(x), \quad x[k] \in \mathbb{R}^k. \quad (4.44)$$

We have for any  $\lambda > 0$ ,

$$PU(x[k]) = E \left[ \max_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} |X_{x_i}| \right] = E \left[ \max |X_{x_i}| + |r| |x_i| \right] \leq |r| U(x) + \lambda^{1/\alpha} E \left[ \max |\tilde{X}_{x_i/\lambda}| \right]$$

and then taking  $\lambda = U(x[k])$ , we get

$$PU(x[k]) \leq |r|U(x[k]) + U(x[k])^{1/\alpha}C_1$$

where  $C_1 = E[\max_{-1 \leq s \leq 1} |X_s|]$ . Now,

$$\begin{aligned} PG(x[k]) &= \sum_{0 \leq i < j \leq k} E[|X_{x_i} - X_{x_j}|^{-1/\alpha}] \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k} E[|\tilde{X}_{x_i - x_j} + r(x_i - x_j)|^{-1/\alpha}] \end{aligned}$$

We decompose each term in the sum using

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\tilde{X}_{x_i - x_j} + r(x_i - x_j)|^{1/\alpha}} &= \frac{1_{\text{Sign}(\tilde{X}_{x_i - x_j}) = \text{Sign}(r)} + 1_{\text{Sign}(\tilde{X}_{x_i - x_j}) \neq \text{Sign}(r)}}{|\tilde{X}_{x_i - x_j} + r(x_i - x_j)|^{1/\alpha}} \\ &\leq \frac{1_{\text{Sign}(\tilde{X}_{x_i - x_j}) = \text{Sign}(r)}}{|\tilde{X}_{x_i - x_j}|^{1/\alpha}} + \frac{1_{\text{Sign}(\tilde{X}_{x_i - x_j}) \neq \text{Sign}(r)}}{||\tilde{X}_{x_i - x_j}| - |r(x_i - x_j)||^{1/\alpha}} \end{aligned}$$

By symmetry and unimodality of the density of centered stable distributions, one has

$$E[|\tilde{X}_{x_i - x_j} + r(x_i - x_j)|^{-1/\alpha}] \leq 2E[|\tilde{X}_{x_i - x_j}|^{-1/\alpha}]$$

Hence

$$\begin{aligned} PG(x[k]) &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} (|x_i - x_j|^{1/\alpha})^{-1/\alpha} E[|\tilde{X}_1|^{-1/\alpha}] \\ &\leq 2(k^2)^{1-1/\alpha} E[|\tilde{X}_1|^{-1/\alpha}] G(x)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

this last inequality come from  $\sum_{i=1}^m |y_i|^{-1/\alpha^2} \leq m^{1-1/\alpha} (\sum_{i=1}^m |y_i|^{-1/\alpha})^{1/\alpha}$  which can be viewed as an application of Jensen inequality: take  $W$  uniform in  $\llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $f(x) = x^{1/\alpha}$ . Since  $f$  is concave  $E[f(|y_W|^{-1/\alpha})] \leq f(E[|y_W|^{-1/\alpha}])$  which is equivalent to  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |y_i|^{-1/\alpha^2} \leq (\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |y_i|^{-1/\alpha})^{1/\alpha}$ . We get, by convexity, for some constant  $C_k$  and  $C'_k$ ,

$$\begin{aligned} PV(x[k]) &= PU(x[k]) + PG(x[k]) \leq C_k(U(x[k])^{1/\alpha} + G(x[k])^{1/\alpha}) + |r|U(x[k]) \\ &\leq C'_k V(x[k])^{1/\alpha} + |r|V(x[k]) \end{aligned}$$

which implies

$$\Delta V(x[k]) \leq C'_k V(x[k])^{1/\alpha} - (1 - |r|)V(x[k]). \quad (4.45)$$



If  $x[k] \notin S_M$  then there exists  $i$  such that  $|x_i| \geq M$  or  $(i, j)$  such that  $|x_i - x_j| \leq 1/M$ . In the first case  $V(x[k]) \geq M$  and in the second one,  $V(x[k]) \geq M^{1/\alpha}$ . For  $M \geq 1$ , we thus have  $V(x[k]) \geq M^{1/\alpha}$  for  $x \notin S_M$ . The RHS of (4.45) rewrites  $V(x[k])^{1/\alpha}(C'_k - (1 - |r|)V(x[k])^{1-1/\alpha})$ . For  $M$  chosen such that  $(1 - |r|)(M^{1/\alpha})^{1-1/\alpha} \geq \max\{1, 2C'_k\}$ ,  $V(x[k])^{1/\alpha}(C'_k - (1 - |r|)V(x[k])^{1-1/\alpha}) \leq -C'_k V(x[k])^{1/\alpha} \leq -C'_k M^{1/\alpha^2}$ .

For  $x[k] \in S_M$ ,  $0 \leq V(x[k]) \leq M + (k + 1)^2 M^{1/\alpha} < +\infty$  and then  $\Delta V(x[k])$  is bounded on  $S_M$ , this allows one to prove that (4.44) holds for  $C = S_M$  and  $M$  large enough.

To end the proof, we need to prove the exchangeability of  $I[k]$ . The argument is general, and present in [CK14]. Take  $\sigma \in \mathcal{S} \llbracket 1, k \rrbracket$  and  $t_1, \dots, t_k$  distinct and non zeros. By the proof above, both  $(I^{(n)}(t_i), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  and  $(I^{(n)}(t_{\sigma(i)}), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  converge to  $I[k]$ . So,  $(I^{(n)}(t_{\sigma(i)}), i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  converges to  $I[k]$  and to  $(I_{\sigma(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$ . Hence,  $I[k] \stackrel{d}{=} (I_{\sigma(i)}, i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$  for any  $\sigma$ .  $\square$

## 4.6 Conclusion

In the paper, we have presented some results and some tools allowing to study iterated independent processes. Our tools are really useful only for processes with increments independent and stationary. Hence, the global frame is that of Lévy processes. But what we did for stationary process could probably be done for continuous MC, homogeneous or not. For example it is likely that one can get some results on iterated Ornstein-Uhlenbeck processes whose increments are simple enough to be controlled.

# Bibliographie

- [Alb09] M. Albenque. A note on the enumeration of directed animals via gas considerations. *Annals of Applied Probability*, 14(5) :1860–1879, 2009.
- [App04] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2004.
- [Bag98] F. Bagnoli. Cellular automata. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9810012v1>, 1998.
- [Bax72] R. J. Baxter. Partition function of the eight-vertex lattice model. *Annals of Physics*, 70(1) :193–228, 1972.
- [Bax82] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. London : Academic Press Inc., 1982.
- [BD85] M. F. Barnsley and S. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 399(1817) :243–275, 1985.
- [BDES88] M. F. Barnsley, S. G. Demko, J. H. Elton, and Geronimo J. S. Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, 24(3) :367–394, 1988.
- [Ber96] J. Bertoin. Iterated brownian motion and stable(1/4) subordinator. *Statistics & probability letters*, 27(2) :111–114, 1996.
- [BGM69] Y. K. Belyaev, Y. I. Gromak, and V. A. Malyshev. Invariant random boolean fields. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 6(5) :792–799, 1969.
- [BK95] K. Burdzy and D. Khoshnevisan. The level sets of iterated brownian motion. In *Séminaire de Probabilités XXIX*, pages 231–236. Springer, 1995.

- [BKW73] H. J. Brascamp, H. Kunz, and F. Y. Wu. Some rigorous results for the vertex model in statistical mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 14(12) :1927–1932, 1973.
- [Bla12] M. Blank. Stochastic stability of traffic maps. *Nonlinearity*, 25(12) :3389, 2012.
- [BM98] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Mathematics*, 180(1) :73–106, 1998.
- [BMdEOR13] R. Briceño, P. Moisset de Espanés, A. Osses, and I. Rapaport. Solving the density classification problem with a large diffusion and small amplification cellular automaton. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 261 :70–80, 2013.
- [Bur93] K. Burdzy. Some path properties of iterated brownian motion. In *Seminar on Stochastic Processes, 1992*, pages 67–87. Springer, 1993.
- [Cas16] J. Casse. Probabilistic cellular automata with general alphabets letting a markov chain invariant. *Advances in Applied Probability 48.2 / arXiv :1410.3159*, 2016.
- [CK14] N. Curien and T. Konstantopoulos. Iterating brownian motions, ad libitum. *Journal of theoretical probability*, 27(2) :433–448, 2014.
- [CLM98] B. Chopard, P. Luthi, and A. Masselot. Cellular automata and lattice boltzmann techniques : An approach to model and simulate complex systems. In *Adv. Phys., submitted*, page 98, 1998.
- [CM11] P. Chassaing and J. Mairesse. A non-ergodic probabilistic cellular automaton with a unique invariant measure. *Stochastic Process. Appl.*, 121(11) :2474–2487, 2011.
- [CM15a] J. Casse and J.F. Marckert. Markovianity of the invariant distribution of probabilistic cellular automata on the line. *Stochastic processes and their applications / arXiv :1401.5365*, 2015.
- [CM15b] J. Casse and J.F. Marckert. Processes iterated *ad libitum*. *arXiv :1504.06433*, 2015.
- [CSC13] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. Surjunctivity and reversibility of cellular automata over concrete categories. In *Trends in Harmonic Analysis*, pages 91–133. Springer, 2013.
- [DDM92] B. Derrida, E. Domany, and D. Mukamel. An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. *Journal of Statistical Physics*, 69(3-4) :667–687, 1992.

- [Dha82] D. Dhar. Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter’s hard-square lattice-gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49(14) :959–962, 1982.
- [Dha86] D. Dhar. The directed animals and related problems. In *Field theory, quantum gravity and strings (Meudon/Paris, 1984/1985)*, volume 246 of *Lect. Notes Phys.*, pages 368–372. Springer, Berlin, 1986.
- [DP92] P. Dai Pra. *Space-time large deviations for interacting particle systems*. PhD thesis, Rutgers Univ., 1992.
- [DPLR02] P. Dai Pra, P.Y. Louis, and S. Roelly. Stationary measures and phase transition for a class of probabilistic cellular automata. *ESAIM : Probability and Statistics*, 6 :89–104, 1 2002.
- [Dur10] R. Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Cambridge University Press, 2010.
- [ES99] N. Eisenbaum and Z. Shi. Uniform oscillations of the local time of iterated brownian motion. *Bernoulli*, 5(1) :49–65, 1999.
- [Fal04] K. Falconer. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2004.
- [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [FS09] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [Fun79] T. Funaki. Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 55(5) :176–179, 1979.
- [Geo11] H. O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. De Gruyter studies in maths. De Gruyter, 2011.
- [GSD<sup>+</sup>03] N. Ganguly, B.K. Sikdar, A. Deutsch, G. Canright, and P.P. P Chaudhuri. A survey on cellular automata. Technical report, Centre for High Performance Computing, Dresden University of Technology, 2003.
- [Gá01] P. Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *J. Stat. Phys.*, 103 :90–99, 2001.
- [Hed69] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical systems theory*, 3(4) :320–375, 1969.
- [HMM15] A. E. Holroyd, I. Marcovici, and J. B. Martin. Percolation games, probabilistic cellular automata, and the hard-core model. *arXiv preprint arXiv :1503.05614*, 2015.

- [Hut81] J. E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5) :713–747, 1981.
- [Kar05] J. Kari. Theory of cellular automata : a survey. *Theor. Comput. Sci.*, 334(1-3) :3–33, April 2005.
- [KDN90] D. Kandel, E. Domany, and B. Nienhuis. A six-vertex model as a diffusion problem : derivation of correlation functions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(15) :L755, 1990.
- [Kes87] H. Kesten. Percolation theory and first-passage percolation. *The Annals of Probability*, pages 1231–1271, 1987.
- [KL99] D. Khoshnevisan and T. M. Lewis. Iterated brownian motion and its intrinsic skeletal structure. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, pages 201–210. Springer, 1999.
- [KV80] O. Kozlov and N. Vasilyev. Reversible Markov chains with local interaction. In *Multicomponent random systems*, volume 6 of *Adv. Probab. Related Topics*, pages 451–469. Dekker, New York, 1980.
- [LBM07] Y. Le Borgne and J.F. Marckert. Directed animals and gas models revisited. *Journal of Combinatorics*, 14(4) :R71, 2007.
- [Lig85] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Classics in Mathematics. Springer, 1985.
- [LMS90] J. L. Lebowitz, C. Maes, and E. R. Speer. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *J. Statist. Phys.*, 59(1-2) :117–170, 1990.
- [Lou02] P.Y. Louis. *Automates cellulaires probabilistes : mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité*. PhD thesis, Université Lille 1, 2002.
- [Mar10] A. Markov. Recherches sur un cas remarquable d’épreuves dépendantes. *Acta mathematica*, 33(1) :87–104, 1910.
- [Mar12] J.F. Marckert. Directed animals, quadratic and rewriting systems. *Electron. J. Comb.*, 19(3) :P45, 2012.
- [Mar13] I. Marcovici. *Automates cellulaires probabilistes et mesures spécifiques sur des espaces symboliques*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2013.
- [MM14a] J. Mairesse and I. Marcovici. Around probabilistic cellular automaton. *Theoretical Computer Science*, 559 :42–72, 2014.
- [MM14b] J. Mairesse and I. Marcovici. Probabilistic cellular automata and random fields with iid directions. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 50(2) :455–475, 2014.

- [MT09] S. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2009.
- [OB09] E. Orsingher and L. Beghin. Fractional diffusion equations and processes with randomly varying time. *The Annals of Probability*, pages 206–249, 2009.
- [Pau35] L. Pauling. The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arrangement. *Journal of the American Chemical Society*, 57(12) :2680–2684, 1935.
- [Pit78] L. Pitt. Local times for gaussian vector fields. *Indiana Univ. Math. J.*, 27 :309–330, 1978.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften A series of comprehensive studies in mathematics. Springer, 1999.
- [Sch11] J. L. Schiff. *Cellular automata : a discrete view of the world*, volume 45. John Wiley & Sons, 2011.
- [Tur04] L. Turban. Iterated random walk. *EPL (Europhysics Letters)*, 65(5) :627, 2004.
- [TVS<sup>+</sup>90] A. L. Toom, N. B. Vasilyev, O. N. Stavskaya, L. G. Mityushin, G. L. Kurdyumov, and S. A. Pirogov. *Stochastic cellular systems : ergodicity, memory, morphogenesis (Part : Discrete local Markov systems, 1–182)*. R. L. Dobrushin and V. I. Kryukov and A. L. Toom editors, Manchester University Press, Manchester, 1990.
- [Vas78] N. B. Vasilyev. Bernoulli and markov stationary measures in discrete local interactions. In *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology*, pages 99–112. Springer, 1978.
- [Ver76] A. M. W. Verhagen. An exactly soluble case of the triangular ising model in a magnetic field. *J. Stats. Phys.*, 15(3) :219–231, 1976.
- [VGAA05] A. Vancheri, P. Giordano, D. Andrey, and S. Albeverio. Continuous valued cellular automata and decision process of agents for urban dynamics. *Computers in Urban Planning and Urban Management (CUPUM 2005)*, 2005.
- [WH97] M. West and J. Harrison. *Beyasian Forecasting and Dynamic Models*. Springer Series in Statistics. Springer, 1997.
- [Wol94] S. Wolfram. *Cellular Automata and Complexity : Collected Papers*. Advanced Book Program. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

- [Xia98] Y. Xiao. Local times and related properties of multidimensional iterated brownian motion. *Journal of Theoretical Probability*, 11(2) :383–408, 1998.
- [ZJ00] P. Zinn-Justin. Six-vertex model with domain wall boundary conditions and one-matrix model. *Physical Review E*, 62(3) :3411, 2000.